Prof. Dr. G. Rohwer

Methoden I, Wintersemester 2010

Aufgabenblatt 1 (14.10.2010)

Diese Aufgaben dienen zur Vergegenwärtigung von Grundbegriffen der Mengenlehre.

1. Es sei $A := \{1, 2, 3, 4\}$ und $B := \{3, 4, 5\}$.
   a) Bilden Sie aus A drei unterschiedliche Teilmengen.
   b) Geben Sie $|A|$ und $|B|$ an.
   c) Schreiben Sie $A \cup B$ und $A \cap B$ explizit als Mengen.
   d) Bilden Sie aus $C := A \cup B$ drei unterschiedliche Partitionen.
   e) Bilden Sie die Potenzmengen von A und B.
   f) Bilden Sie das kartesische Produkt $A \times B$ und schreiben Sie es explizit als eine Menge.
   g) Bilden Sie das kartesische Produkt B^3 und schreiben Sie es explizit als eine Menge.
   h) Bilden Sie zunächst das kartesische Produkt $\{a, b\} \times \{1, 2\}$ und geben Sie dann die Potenzmenge $\mathcal{P}(\{a, b\} \times \{1, 2\})$ an.
   i) Bilden Sie $A \setminus B$ und $B \setminus A$.
   j) Was ist $A \setminus A$?
2. Es sei $A := \{a, b, \emptyset\}$, $B := \{c, d\}$.
   a) Ist $\emptyset \in A$? Ist $\emptyset \subseteq A$? Ist $\emptyset \in B$? Ist $\emptyset \subseteq B$?
   b) Berechnen Sie $|A|$.
   c) Berechnen Sie: $A \times \emptyset$ und $\emptyset \times A$.
   d) Berechnen Sie: $\mathcal{P}(A)$.
   e) Wieviele Elemente haben die folgenden Mengen: $\mathcal{P}(A)$, $A \cup \emptyset$, $A \cap \emptyset$, $\mathcal{P}(A) \times A$, $\mathcal{P}(A) \times A \times \emptyset$, $\mathcal{P}(A) \cup A$?
   f) Schreiben Sie $\mathcal{P}(A) \cup A$ explizit als eine Menge.
3. Welche von den folgenden Schreibweisen sind formal korrekt, welche nicht (dabei ist $a \neq \emptyset$)?
   a) $\{\emptyset\}$.
   b) $\{a, \emptyset\}$.
   c) $\{a, \emptyset, \emptyset\}$.
   d) $\{\emptyset, \emptyset\}$.
   e) $\{\{a\}, \emptyset, \emptyset\}$.
   f) $\{\{a, \emptyset\}, \emptyset\}$.
4. Es sei $A := \{m, w\}$, $B := \{d, b, s\}$ und $C := \{a_1, a_2\}$.
   a) Geben Sie explizit das kartesische Produkt $A \times B \times C$ an.
   b) Wieviele Elemente enthält $A \times B \times C$?
   c) Geben Sie eine Partition von $A \times B \times C$ in drei Teilmengen an.
   d) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass $A \times B \times C \neq B \times A \times C$ ist.
   e) Wieviele Elemente enthält die Menge $A \times B \times C \times \emptyset$?
5. Fassen Sie folgende Ausdrücke zusammen:
   a) $(A \cap B) \cup (A \cap B)$
   b) $(A \cup B) \cap (A \cup B)$
   c) $A \cap (A \cup B)$
6. Es sei $A := \{1, 2, 3, 4\}$ und $B := \{1, \ldots, 20\}$, und außerdem sei eine Funktion $f : A \longrightarrow B$ durch $f(a) := a^2$ definiert.
   a) Berechnen Sie $f(2)$ und $f(4)$.
   b) Berechnen Sie $f(\{2, 4\})$ und $f(A)$.
   c) Berechnen Sie $f^{-1}(9)$ und $f^{-1}(\{9\})$.
   d) Berechnen Sie $f^{-1}(\{5\})$ und $f^{-1}(\{4, 5\})$.
   e) Ist $f^{-1}(f(A)) = A$?
   f) Ist f injektiv?
   g) Ist f surjektiv?

7. Die folgende Tabelle enthält in der ersten Zeile symbolische Namen von Personen und in der zweiten Zeile ihr gegenwärtiges Alter:

ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8
20	30	22	20	24	25	24	20

Betrachten Sie diese Tabelle als Definition einer Funktion mit dem Namen X, die jeder Person ihr gegenwärtiges Alter zuordnet.

a) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion an (im folgenden A genannt).

b) Geben Sie den kleinstmöglichen Wertebereich der Funktion an (im folgenden B genannt).

8. Die folgenden Fragen beziehen sich auf die Funktion $X : A \longrightarrow B$, die in Aufgabe (2) definiert wurde.

a) Ist X injektiv?

b) Ist X surjektiv?

c) Ist $X(A) = B$? Unterscheidet sich diese Frage von Aufgabe (b)?

d) Berechnen Sie für jedes Alter $b \in B$:

α) $X^{-1}(\{b\})$,

β) $|X^{-1}(\{b\})|$,

γ) $|X^{-1}(\{b\})|/|A|$,

und geben Sie jeweils eine inhaltliche Interpretation an.

e) Ist $\{X^{-1}(\{b\}) \mid b \in B\}$ eine Partition von A ? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie die Menge explizit ausschreiben.

f) Berechnen Sie $X^{-1}(\{b|b \geq 25\})$. Wie lässt sich diese Menge interpretieren?