Grundbegriffe: Mengen und Funktionen

Auszug aus G. Rohwer, U. Pötter, Grundzüge der sozialwissenschaftlichen Statistik (Weinheim: Juventa 2001, S. 21-26).

1 Notationen aus der Mengenlehre

1. Als ein Grundbegriff dient das Wort ‘Menge’ im Sinne einer Gesamtheit von Elementen. Zur Erläuterung verwenden wir hier Großbuchstaben für Mengen und Kleinbuchstaben für Elemente; z.B. $A := \{a_1, a_2, a_3\}$, um eine Menge mit dem Namen A zu definieren, die aus den drei Elementen a_1, a_2 und a_3 besteht. Dieser Konvention werden wir, soweit es möglich ist, im gesamten Text folgen.[1]

2. Um von einem Objekt zu sagen, daß es Element einer Menge ist, wird das Zeichen $\in$ verwendet. Z.B. könnte man sagen: $a \in A$; dann ist gemeint, daß a ein (irgendein) Element der Menge A ist, und aus der vorangegangenen Definition von A folgt, daß a entweder gleich a_1 oder gleich a_2 oder gleich a_3 ist. Entsprechend wird das Zeichen $\notin$ verwendet, um zu sagen, daß etwas kein Element einer Menge ist oder sein soll. Zwei Mengen werden als gleich angesehen, wenn jedes Element der einen auch ein Element der anderen Menge ist, und umgekehrt. Der Begriff einer Menge impliziert also nicht, daß es irgendeine Art von Ordnung für ihre Elemente gibt; z.B. gibt es im Sinne der Gleichheit von Mengen keinen Unterschied zwischen $\{a_2, a_1, a_3\}$ und der oben angegebenen Menge A.

3. Gelegentlich kommt es jedoch auch auf die Reihenfolge an; dann werden runde Klammern verwendet, z.B. in der Form

$$(a_1, a_2, a_3)$$

[1] Vollständig konsequent kann man sich nicht an diese Konvention halten, weil Elemente von Mengen selbst wieder Mengen sein können.

In diesem Beispiel werden drei Elemente zu einer Gesamtheit zusammengefaßt, bei der es auf die Reihenfolge ankommt, d.h. es ist z.B.

$$(a_1, a_2, a_3) \neq (a_2, a_1, a_3)$$

Enthält eine solche Gesamtheit zwei Elemente, spricht man von einem *Paar*, bei drei Elementen von einem *Tripel*. Allgemein wird eine geordnete Gesamtheit

$$(a_1, \ldots, a_n)$$

die aus n Elementen besteht, ein n-*Tupel* genannt.

4. Hat man eine Menge eingeführt, kann man aus ihr neue Mengen bilden. Hat man z.B. bereits eine Menge B eingeführt, kann man daraus mit der folgenden Formulierung eine neue Menge bilden:

$$C := \{b \in B \,|\, \text{für } b \text{ gilt die Eigenschaft } \ldots\}$$

Es wird hierdurch eine neue Menge mit dem Namen C gebildet, die aus allen Elementen von B besteht, für die die hinter dem senkrechten Bedingungsstrich angegebene Eigenschaft zutrifft. Die neue Menge C ist infolgedessen eine *Teilmenge* der Menge B, wofür man auch schreibt: $C \subseteq B$. Mit dieser Schreibweise ist gemeint: jedes Element von C ist auch ein Element von B. Die Definition impliziert, daß auch die Aussage $B \subseteq B$ richtig ist. Manchmal möchte man diesen Fall ausschließen und sich nur auf *echte Teilmengen* beziehen; dafür wird die Schreibweise $C \subset B$ verwendet. Sie besagt: C ist eine Teilmenge von B und nicht mit B identisch.

5. Hat man zwei Mengen, kann man aus ihnen auch mit den Operationen ‘Vereinigung’ und ‘Durchschnitt’ neue Mengen bilden. Hat man etwa bereits Mengen A und B definiert, kann man daraus ihre *Vereinigungsmenge* $A \cup B$ bilden. Sie besteht aus allen Objekten, die Element von A *oder* Element von B sind (wobei hier ein nicht-ausschließendes ‘oder’ gemeint ist). Analog kann man die *Durchschnittsmenge* (oder kurz: den *Durchschnitt*) von A und B bilden. Dafür wird die Schreibweise $A \cap B$ verwendet. Diese Menge besteht aus allen Objekten, die sowohl Element von A als auch Element von B sind. Hierbei kann es natürlich vorkommen, daß es überhaupt kein Objekt gibt, das sowohl in der einen als auch in der anderen Menge enthalten ist. Man nennt die beiden Mengen dann *disjunkt*. Um trotzdem davon ausgehen zu können, daß in jedem Fall eine neue Menge entsteht, wird der Begriff einer *leeren Menge* eingeführt. Um auf sie zu verweisen, dient das Symbol $\emptyset$. Somit kann man sagen: zwei Mengen A und B sind genau dann disjunkt, wenn $A \cap B = \emptyset$ ist.

6. Für die Verknüpfungen 'Vereinigung' und 'Durchschnitt' gelten einige einfache Rechenregeln. Zunächst ist evident, daß die Verknüpfungen kommutativ sind:

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

Weiterhin gibt es zwei Distributivgesetze:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

7. Hier schließt der Begriff einer *Partition* an, den wir oft verwenden werden. Ist eine Menge A gegeben, besteht eine Partition von A aus einer Menge von Teilmengen von A, etwa aus den Mengen $A_1, \ldots, A_m$, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind: die Mengen $A_1, \ldots, A_m$ sind paarweise disjunkt und ihre Vereinigung ist mit der Menge A identisch. Ist z.B. $A := \{a_1, a_2, a_3\}$, dann wäre die Menge

$$\{\{a_1\}, \{a_2, a_3\}\}$$

eine Partition von A. Partitionen sind also Mengen, deren Elemente wiederum Mengen sind. Es ist auch offensichtlich, daß es im allgemeinen viele unterschiedliche Partitionen einer Menge geben kann.

8. Weiterhin wird oft der Begriff einer *Potenzmenge* verwendet. Ist eine Menge A gegeben, versteht man unter ihrer Potenzmenge die Menge aller ihrer Teilmengen. Als Schreibweise wird $\mathcal{P}(A)$ verwendet, um auf die Potenzmenge von A zu verweisen. Man beachte, daß insbesondere die leere Menge $\emptyset$ und die Menge A selbst Elemente von $\mathcal{P}(A)$ sind. Ist z.B. wieder

$A := \{a_1, a_2, a_3\}$, findet man:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_3\}, \{a_1, a_2, a_3\}\}$$

9. Ebenfalls sehr oft wird der Begriff eines *kartesischen Produkts* von zwei oder mehr Mengen verwendet. Zur Erläuterung soll ein kleines Zahlenbeispiel dienen. Es seien zwei Mengen

$$A := \{1, 2\} \quad \text{und} \quad B := \{3, 4, 5\}$$

gegeben. Dann besteht das kartesische Produkt von A und B (geschrieben: $A \times B$) aus der Menge aller geordneten Paare, die man durch Kombination der Elemente von A und B bilden kann. In unserem Beispiel:

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$$

Diese Begriffsbildung ist sehr allgemein; z.B. kann man auch das kartesische Produkt von drei (im Prinzip beliebig vielen) Mengen bilden. Angenommen, man hat noch eine dritte Menge, die nur aus einem Element besteht, etwa $C := \{6\}$, dann findet man:

$$A \times B \times C = \{(1, 3, 6), (1, 4, 6), (1, 5, 6), (2, 3, 6), (2, 4, 6), (2, 5, 6)\}$$

Man kann auch das kartesische Produkt einer Menge mit sich selbst bilden; zum Beispiel:

$$\begin{aligned} A \times A \times A = \{&(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 2, 2), \\ &(2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (2, 2, 2)\} \end{aligned}$$

Wenn man das kartesische Produkt einer Menge mit sich selbst bildet, wird oft eine abkürzende Schreibweise verwendet:

$$A^n := \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n\text{-mal}}$$

Weiterhin wird folgende Konvention verwendet:

$$A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$$

wobei A eine beliebige Menge ist.

10. Für kartesische Produkte gelten die folgenden Distributivgesetze:

$$A \times (B \cup C) \;=\; (A \times B) \cup (A \times C)$$
$$A \times (B \cap C) \;=\; (A \times B) \cap (A \times C)$$

Man beachte jedoch, daß die kartesische Produktbildung im allgemeinen nicht kommutativ ist, d.h. im allgemeinen führt $B \times A$ zu einer anderen Menge als $A \times B$. In unserem Beispiel:

$$B \times A \;=\; \{(3,1),(4,1),(5,1),(3,2),(4,2),(5,2)\}$$

Der Unterschied entsteht daraus, daß die Elemente eines kartesischen Produkts *geordnete* Paare (oder n-Tupel) der Elemente der Ursprungsmengen sind.

11. Die meisten Mengen, mit denen wir uns beschäftigen werden, sind endlich, d.h. haben nur eine endliche Anzahl von Elementen. Insbesondere beschäftigen wir uns nur mit endlichen statistischen Gesamtheiten. Ist A eine endliche Menge, verwenden wir die Schreibweise $|\,A\,|$ für die Anzahl ihrer Elemente. Ist z.B. $A := \{a_1, a_2, a_3\}$, dann ist $|\,A\,| = 3$. Als Konvention wird vereinbart: $|\,\emptyset\,| = 0$.

2 Erläuterungen zum Funktionsbegriff

1. Von grundlegender Bedeutung für die Statistik (wie auch für viele andere Gebiete) ist der Funktionsbegriff. Wir verwenden diesen Begriff so, wie er in der Mathematik verwendet wird, und beziehen ihn auf eine vorgängige Einführung von Mengen. Wenn zwei Mengen A und B gegeben sind, ist eine *Funktion* (auch *Abbildung* genannt) eine Regel, durch die jedem Element $a \in A$ genau ein Element $b \in B$ zugeordnet wird. Wir verwenden die Schreibweise

$$f : A \longrightarrow B$$

f ist der Name der Funktion (wofür auch beliebige andere Buchstaben und Symbole verwendet werden können); A wird *Definitionsbereich* und B wird *Wertebereich* der Funktion genannt. Ist $a \in A$ ein Element aus dem Definitionsbereich der Funktion f, wird mit $f(a)$ dasjenige Element aus dem Wertebereich B bezeichnet, das dem Element a durch die Funktion f zugeordnet wird. In dieser Schreibweise wird a als ein *Argument* der Funktion verwendet, was durch runde Klammern kenntlich gemacht wird.

2. Zur Illustration betrachten wir Mengen $A := \{1,2\}$ und $B := \{3,4,5\}$. Eine Funktion $f : A \longrightarrow B$ könnte z.B. durch folgende Festlegung eingeführt werden: $f(1) = 3, f(2) = 4$. Hier sollte man sich überlegen, wann zwei Funktionen als gleich angesehen werden können. Wir verwenden folgende Vereinbarung: Zwei Funktionen $f : A \longrightarrow B$ und $g : C \longrightarrow D$ werden als gleich angesehen, wenn gilt: $A = C$, $B = D$ und $f(a) = g(a)$ für alle $a \in A$. Würde man z.B. eine zweite Funktion

$$g : \{1,2\} \longrightarrow \{3,4\}$$

einführen, wobei $g(1) = 3$ und $g(2) = 4$ ist, wäre sie von der oben als Beispiel verwendeten Funktion f verschieden.

3. Ist eine Funktion $f : A \longrightarrow B$ eingeführt worden, kann man als Argumente zunächst Elemente ihres Definitionsbereichs verwenden, also z.B. den Ausdruck $f(a)$ verwenden, wobei a ein Element des Definitionsbereichs A der Funktion ist. Es ist jedoch oft zweckmäßig, als Argumente auch Teilmengen des Definitionsbereichs zuzulassen. Dies bedeutet, daß f als eine *Mengenfunktion*

$$f : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(B)$$

verwendet wird, die jeder Teilmenge $C \subseteq A$ eine Teilmenge

$$f(C) \;:=\; \{b \in B \,|\, \text{es gibt ein } a \in C \text{ mit } f(a) = b\}$$

im Wertebereich von f zuordnet. Gleichbedeutend ist die Schreibweise

$$f(C) \;=\; \{f(a) \,|\, a \in C\}$$

Insbesondere ist auch $f(A)$ eine Teilmenge des Wertebereichs von f und wird das *Bild von A unter der Funktion f* oder auch *Bildmenge von f* genannt. Offenbar gilt stets: $f(A) \subseteq B$; wie jedoch das oben angeführte Beispiel zeigt, ist es durchaus möglich, daß $f(A) \neq B$ ist.

4. Faßt man eine Funktion $f : A \longrightarrow B$ als eine Mengenfunktion auf, kann auch stets eine inverse Funktion gebildet werden. Wir verwenden folgende Definition: Die zu f *inverse Mengenfunktion* ist die Funktion

$$f^{-1} : \mathcal{P}(B) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$$

die jeder Teilmenge des Wertebereichs von f eine Teilmenge aus dem Definitionsbereich von f zuordnet, und zwar nach folgender Vorschrift:

$$f^{-1}(C) \;:=\; \{a \in A \,|\, f(a) \in C\}$$

wobei C ein beliebiges Element von $\mathcal{P}(B)$, also eine beliebige Teilmenge von B ist. $f^{-1}(C)$ wird auch das *Urbild* von C (bzgl. f) genannt. Ist z.B. eine Funktion $f : \{1,2\} \longrightarrow \{3,4,5\}$ durch $f(1) = 3$ und $f(2) = 4$ gegeben, findet man für die Teilmengen des Wertebereichs $\{3,4,5\}$:

$$f^{-1}(\{3\}) = \{1\},\; f^{-1}(\{4\}) = \{2\},\; f^{-1}(\{5\}) = \emptyset,$$

$$f^{-1}(\{3,4\}) = \{1,2\},\; f^{-1}(\{3,5\}) = \{1\},\; f^{-1}(\{4,5\}) = \{2\},$$

$$f^{-1}(\{3,4,5\}) = \{1,2\},\; f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

Es gelten folgende Rechenregeln:

$$f^{-1}(C \cup D) \;=\; f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$

$$f^{-1}(C \cap D) \;=\; f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$

wobei C und D beliebige Teilmengen von B sind.

5. Es sollte deutlich geworden sein, daß der hier verwendete mathematische Funktionsbegriff sich grundsätzlich von Redeweisen unterscheidet, in denen von ‘Funktion’ im Sinne von ‘Zweck’ gesprochen wird. Es bleiben natürlich Fragen übrig. Zunächst kann man sich fragen, wie Funktionen zustande kommen. Die allgemeine Antwort auf diese Frage ist, daß Funktionen durch Menschen gemacht werden. Es sind Menschen, die Mengen konzipieren und Zuordnungen zwischen ihren Elementen vornehmen und diese Zuordnungen als Funktionen darstellen. Funktionen sind keine empirischen Sachverhalte, die in unserer Erfahrungswelt wahrgenommen werden können. Dennoch gibt es einen wichtigen Unterschied zwischen Mathematik und Statistik. In der Mathematik kann man Mengen und Funktionen

ohne Rücksicht auf empirische Sachverhalte konstruieren. Statistische Begriffsbildungen sollen aber helfen, empirisch gewonnenes Wissen darstellbar und reflektierbar zu machen. Wenn im Rahmen der Statistik Mengen und Funktionen konstruiert werden, sind deshalb nicht allein ihre formalen Eigenschaften, sondern in erster Linie die jeweils intendierten Bedeutungen wichtig. Allerdings liefern die formalen Implikationen von Begriffsbildungen oft wichtige Hinweise oder zumindest einen Ausgangspunkt, um auch genauer über mögliche Bedeutungen nachdenken zu können.