Dr. U. Pötter WS 2004/2005
Statistik III

Aufgabenblatt 2

Kovarianz

1) Zeigen sie, dass folgende Beziehungen gelten, wobei a, b Konstanten sind:

   a) $\text{Cov}(X,Y) = M(XY) - M(X)M(Y)$
   b) $\text{Cov}(aX,bY) = ab\ \text{Cov}(X,Y)$
   c) $\text{Cov}(X+a,Y+b) = \text{Cov}(X,Y)$
   d) Ist Y konstant, gilt also $Y(\omega_1) = Y(\omega_2) = \ldots = Y(\omega_n)$, dann ist $\text{Cov}(X,Y) = 0$.
   e) Ist $M(X) = 0$, dann ist $\text{Cov}(X,Y) = M(XY)$.
   f) Ist $\tilde{\mathcal{X}} \times \tilde{\mathcal{Y}} = \{0,1\} \times \{0,1\}$, dann ist $\text{Cov}(X,Y) = P[X,Y](\{(1,1)\}) - P[X](\{1\})P[Y](\{1\})$.

2) Berechnen Sie die Kovarianz von (X,Y) für:

   a) $(X,Y)(\omega_1) = (-0.6,2)$, $(X,Y)(\omega_2) = (1,-7)$, $(X,Y)(\omega_3) = (0.5,-0.5)$
   b) $(X,Y)(\omega_1) = (-1,1)$, $(X,Y)(\omega_2) = (0,0)$, $(X,Y)(\omega_3) = (1,1)$
   c) $(X,Y)(\omega_1) = (-2,-3)$, $(X,Y)(\omega_2) = (-1,-1)$, $(X,Y)(\omega_3) = (0,1)$, $(X,Y)(\omega_4) = (1,3)$, $(X,Y)(\omega_5) = (2,5)$

3) Sei $\tilde{Y} \times \tilde{X} = \{0,1\} \times \{0,1\}$. Bei $n = 200$ Beobachtungen ergeben sich folgende Häufigkeiten:

$(\tilde{x},\tilde{y})$	Häufigkeit
(1,1)	70
(1,0)	30
(0,1)	60
(0,0)	40

   a) Berechnen Sie die Kovarianz zwischen X und Y.
   b) Berechnen Sie $\text{P}[X|Y=1](\{1\})$ und $\text{P}[Y|X=1](\{1\})$

Tschebyscheffsche Ungleichung

4) Zeigen Sie, dass aus der Tschebyscheff Ungleichung $\text{P}[X](\{|X-M(X)| \geq a\}) \leq V(X)/a^2$ folgt: $\text{P}[X](\{|X-M(X)| < a\}) \geq 1 - V(X)/a^2$. *Hinweis:* $\{\omega \mid |X - M(X)| \geq a\} \cup \{\omega \mid |X - M(X)| < a\} = \Omega$.

5) Sei X eine statistische Variable mit $M(X) = 0$ und $V(X) = 1$. Finden Sie für $q = 0.5, 0.9, 0.95$ und 0.99 diejenigen Werte a, so dass $\text{P}[X](\{|X| < a\}) \geq q$ gilt.

6) Sei X eine statistische Variable mit $\text{V}(X) > 0$ und $\text{P}[X](\{|X - M(X)| \leq \sqrt{V(X)}\}) = 1$. Zeigen Sie, dass dann $\text{P}[X](\{X = M(X) - a\}) = \text{P}[X](\{X = M(X) + a\}) = 1/2$ für ein $a \neq 0$ gilt.

Bedingte Verteilungscharakterisierungen

7) Zeigen Sie für zwei statistische Variable X, Y, dass die bedingten Mittelwerte $M[Y|X]$ den Durchschnitt der quadratischen Abstände von Y minimieren, d.h. dass für alle Funktionen $g(X)$ der Variablen X gilt:

$$M\left((Y - M(Y|X))^2\right) \leq M\left((Y - g(X))^2\right)$$

Hinweis: Beachten Sie, dass $M\left((Y - M(Y|X))^2\right) = M(M[(Y - M(Y|X))^2|X])$ ist.