Dr. U. Pötter WS 2004/2005

Statistik III

Aufgabenblatt 1

Bedingte Verteilungscharakterisierungen

1) Sei $(Y,X) : \Omega \to \tilde{\mathcal{Y}} \times \tilde{\mathcal{X}} = \{0,1\} \times \{0,1\}$ und $\mathrm{P}[X,Y](\{(0,0)\}) = 1/9$, $P[X,Y](\{(0,1)\}) = 3/9, P[X,Y](\{(1,0)\}) = 2/9, P[X,Y](\{(1,1)\}) = 3/9$.

   a) Berechnen Sie $\mathrm{P}[X \mid Y = 1](\{1\})$ und $\mathrm{P}[X \mid Y = 0](\{1\})$.

   b) Berechnen Sie $\mathrm{M}(Y \mid X = 0)$ und $\mathrm{M}(Y \mid X = 1)$.

   c) Berechnen Sie $\mathrm{V}(Y \mid X = 0)$ und $\mathrm{V}(Y \mid X = 1)$.

2) Sei $\Omega = \{0, 1, \ldots, 10\}$ und $X(\omega) = \omega$. Sei $Y(\omega) = (X(\omega) - 5)^2$.

   a) Berechnen Sie $\mathrm{M}(X)$, $\mathrm{M}(Y)$, $\mathrm{V}(X)$, $\mathrm{V}(Y)$, $\mathrm{Cov}(X,Y)$ und $\mathrm{Corr}(X,Y)$.

   b) Berechnen Sie $\mathrm{M}(X \mid |Y| \leq 1)$ und $\mathrm{V}(X \mid |Y| \leq 1)$.

   c) Berechnen Sie $\mathrm{M}(X \mid X \geq 5)$.

   d) Berechnen Sie eine Abschätzung von $\mathrm{P}[X](\{\tilde{x} \mid |\tilde{x} - M(X)| \geq 4\})$ mit der Tschebyscheffschen Ungleichung. Vergleichen Sie die Ungleichung mit dem tatsächlichen Wert von $\mathrm{P}[X](\{\tilde{x} \mid |\tilde{x} - M(X)| \geq 4\})$

3) Die relativen Häufigkeiten der statistischen Variablen (X,Y,Z) mit $\widetilde{\mathcal{X}} \times \widetilde{\mathcal{Y}} \times \widetilde{\mathcal{Z}} = \{1,2\} \times \{1,2\} \times \{1,2\}$ sind durch $P[X,Y,Z](\{(1,1,1)\}) = 1/8$, $P[X,Y,Z](\{(1,1,2)\}) = 1/8$, $P[X,Y,Z](\{(1,2,1)\}) = 1/16$, $P[X,Y,Z](\{(1,2,2)\}) = 0$, $P[X,Y,Z](\{(2,1,1)\}) = 1/4$ sowie $P[X,Y,Z](\{(2,1,2)\}) = 3/16$, $P[X,Y,Z](\{(2,2,1)\}) = 0$ und $P[X,Y,Z](\{(2,2,2)\}) = 1/4$ gegeben.

   a) Berechnen Sie $M(X|Y = 2)$.

   b) Berechnen Sie $M(X|Y = 2, Z = 1)$.

   c) Berechnen Sie $M(X|Y + Z = 3)$.

Funktionen

4) Seien die drei Funktionen f, g, h mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) := x^2$, $g : \mathbb{R} \to [-1,1]$, $g(x) := \cos(x)$, und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $h(x) = \exp(x) = e^x$ gegeben.

   a) Berechnen Sie $h \circ g \circ f(0) = h(g(f(0)))$ und $h \circ g \circ f(\sqrt{2\pi}) = h(g(f(\sqrt{2\pi})))$.

   b) Geben Sie den Definitions- und Wertebereich von $h \circ g \circ f$ an.

   c) Ist die Operation $\circ$ assoziativ? Ist sie kommutativ?