Demographische Modelle (Teil 1)

SoSe 2010

LS Sozialwissenschaftliche Methodenlehre und Sozialstatistik

C. Dudel

Worum geht's?

Ziel ist die Simulation von „Bevölkerungsdynamik“– hier der Veränderung der Größe und Altersstruktur einer Bevölkerung über einen bestimmten Zeitraum hinweg

Wir verwenden hier das „Standardmodell“ für Bevölkerungsfortschreibungen

Grundlegende Begriffe – Bevölkerung

„Bevölkerung" meint eine Menge von Menschen, die in zeitlicher, regionaler und sachlicher Hinsicht abgegrenzt ist

zeitlich: Bevölkerung zu einem bestimmten Stichtag
regional: Gebiet der Bundesrepublik Deutschland
sachlich: „Bevölkerung am Ort der Hauptwohnung"

Grundlegende Begriffe – Bevölkerung

„Bevölkerung“ meint eine Menge von Menschen, die in zeitlicher, regionaler und sachlicher Hinsicht abgegrenzt ist

zeitlich: Bevölkerung zu einem bestimmten Stichtag

regional: Gebiet der Bundesrepublik Deutschland

sachlich: „Bevölkerung am Ort der Hauptwohnung“

Grundlegende Begriffe – Bevölkerung

Untergliederung der betrachteten Bevölkerung nach:

- Geschlecht
- Alter

Grundlegende Begriffe – Dynamik

Bevölkerung verändert sich zwischen zwei Stichtagen durch Mortalität, Fertilität und Migration

$$n_t = n_{t-1} + b_{t-1,t} - d_{t-1,t} + m^i_{t-1,t} - m^o_{t-1,t}$$

$\rightarrow$ Buchführungsgleichung

Annahme: zwischen zwei Stichtagen liegt ein Jahr

Grundlegende Begriffe – Dynamik

Bevölkerung verändert sich zwischen zwei Stichtagen durch Mortalität, Fertilität und Migration

$$n_t = n_{t-1} + b_{t-1,t} - d_{t-1,t} + m^i_{t-1,t} - m^o_{t-1,t}$$

$\rightarrow$ Buchführungsgleichung

Annahme: zwischen zwei Stichtagen liegt ein Jahr

Grundlegende Begriffe – Dynamik

Bevölkerung verändert sich zwischen zwei Stichtagen durch Mortalität, Fertilität und Migration

$$n_t = n_{t-1} + b_{t-1,t} - d_{t-1,t} + m^i_{t-1,t} - m^o_{t-1,t}$$

$\rightarrow$ Buchführungsgleichung

Annahme: zwischen zwei Stichtagen liegt ein Jahr

Grundlegende Begriffe – Dynamik: Raten I

Sei $n_{t,a}$ die Zahl der Personen zu Zeitpunkt t im Alter a und $d_{t,a}$ die Zahl der Personen, die im Alter a im Zeitintervall t bis $t+1$ sterben; dann sei die Sterberate $q_{t,a}$ gegeben durch

$$q_{t,a} = \frac{d_{t,a}}{n_{t,a}}$$

$l_{t,a}$ sei die Überlebenswahrscheinlichkeit von Alter a bis zum Alter $a+1$

(Etwas vereinfachte Darstellung)

Grundlegende Begriffe – Dynamik: Rate II

Sei $n^f_{t,a}$ die Zahl der Frauen zu Zeitpunkt t im Alter a und sei $b_{t,a}$ die Zahl der von diesen Frauen im Zeitraum von t bis $t+1$ geborenen Kinder; dann ist die Geburtenrate gegeben durch

$$f_{t,a} = \frac{b_{t,a}}{n^f_{t,a}}$$

Fortschreibung I

Kennt man $n_{t,a}$ und $q_{t,a}$ bzw. $l_{t,a}$ und lässt Migration unberücksichtigt, lässt sich $n_{t+1,a+1}$ ohne weiteres berechnen als:

$$
\begin{aligned}
n_{t+1,a+1} &= n_{t,a} - d_{t,a} \\
&= n_{t,a} - n_{t,a} q_{t,a}
\end{aligned}
$$

oder

$$
n_{t+1,a+1} = n_{t,a} l_{t,a}
$$

Dabei müsste man zur Berechnung von $q_{t,a}$ bzw. $l_{t,a}$ zwar $d_{t,a}$ kennen, allerdings lassen sich hier Annahmen treffen

Fortschreibung II

Die Zahl der 0-jährigen ergibt sich einfach als

$$n_{t+1,0} = \sum_{x=\alpha}^{\beta} n^f_{t,x} f_{t,x}$$

Vereinfachende Annahmen

- Es wird eine rein weibliche Bevölkerung betrachtet
- Migration wird ignoriert
- Niemand wird älter als 100 Jahre

Das Leslie-Modell I

Gegeben sei

$$\mathbf{n_t} = (n_{t,0}, n_{t,1}, \ldots, n_{t,\omega})'$$

wobei ω das höchste erreichbare Alter sei
(in unserem Fall $\omega = 100$)

Das Leslie-Modell II

Ferner sei

$$\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_{\omega-1} & f_\omega \\ l_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & l_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{\omega-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Das Leslie-Modell III

Dann lässt sich eine Ausgangsbevölkerung $\mathbf{n_t}$ fortschreiben als

$$\mathbf{n}_{t+1} = \mathbf{A}_t \mathbf{n}_t$$

Das Leslie-Modell III

$$\begin{pmatrix} n_{t+1,0} \\ n_{t+1,1} \\ n_{t+1,2} \\ \vdots \\ n_{t+1,\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_{\omega-1} & f_\omega \\ l_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & l_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{\omega-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{t,0} \\ n_{t,1} \\ n_{t,2} \\ \vdots \\ n_{t,\omega} \end{pmatrix}$$

Was machen wir jetzt?

Bisher:

- Der zu beschreibende Prozess ist angegeben
- Ebenso, wie sich dieser Prozess entwickelt

Nun folgt:

- Parameter festlegen
- Modell programmieren
- Ergebnisse berechnen lassen & auswerten

Parameter

Wir verwenden für alle Paramter ($n_{t,a}$,$f_{t,a}$ und $l_{t,a}$) die Daten des Jahres 2006 und halten $f_{t,a}$ und $l_{t,a}$ für die Fortschreibung konstant

Konsequenz

$$\mathbf{n}_{t+k} = \mathbf{A}^k \mathbf{n}_t$$

Modellannahmen

Annahmen:

- Nur Frauen berücksichtigt
- Keine Migration
- Konstante Mortalität und Fertilität

Modellannahmen

Führt zu sogenannter stabiler Bevölkerung:

- Konzept der stabilen Bevölkerung in Bevölkerungsmathematik enorm wichtig
- Viele Ergebnisse der (klassischen) Demographie basieren gerade hierauf!
- Verhältnismäßig einfaches und damit überschaubares Modell

Modellannahmen

Bei „echten“ Bevölkerungsvorausberechnungen

- Beide Geschlechter
- Migration
- Veränderliche Mortalität und Fertilität

Kurze Einordnung

- Numerische Simulation („durchrechnen“)
- Makro-Modell (Aggregate anstatt einzelner Personen)
- Deterministisch (gegeben der Parameter steht Ergebnis fest; jeder Durchlauf gleich)
- Analytische Lösung für bestimmte Aspekte möglich

Stabile Bevölkerung – Empirische Bevölkerung

Wie gut beschreiben stabile Bevölkerungen „echte“ Bevölkerungen?

Erfolg von Bevölkerungsvorausberechnungen

Wie gut schneiden „echte“ Bevölkerungsvorausberechnungen ab? Also Bevölkerungsvorausberechnungen ohne die hier getroffenen einschränkenden Annahmen?

Erfolg von Bevölkerungsvorausberechnungen

Beispiel: ältere Vorausberechnungen des Statistischen Bundesamtes (beschrieben in Bretz 2002)

Erfolg von Bevölkerungsvorausberechnungen

Ähnliche Ergebnisse lassen sich für sehr viele Vorausberechnungen treffen (national und international)!
Wenn die Resultate der Vorausberechnungen relativ gut waren, lag dies oft daran, dass sich unterschiedliche fehlerhafte Annahmen gegenseitig aufgehoben haben!