Dipl.-Soz.Wiss. Esther Sebald Sommersemester 2006
Methoden der empirischen Sozialforschung II

# Aufgabensammlung Teil I (13.4.2006)

## Wiederholung zentraler Grundbegriffe

1. Gegeben sind die Mengen $A := \{a, b, c, d\}$ und $B := \{1, \{b\}, 2\}$.

   (a) Bilden Sie aus A eine und aus B zwei unterschiedliche Teilmengen.

   (b) Schreiben Sie $A \cup B$ explizit als Menge. Geben sie außerdem $A \cap \emptyset$ und $B \cup \emptyset$ an.

   (c) Schreiben Sie das kartesische Produkt $A \times B$ explizit als Menge. Geben Sie außerdem $A \times \emptyset$ sowie $|B^3|$ an.

   (d) Schreiben Sie das kartesische Produkt $B^2$ explizit als Menge. Geben Sie außerdem $|B \times A \times \emptyset|$ an.

   (e) Bilden Sie $\mathcal{P}(B)$ (die Potenzmenge von B).

   (f) Geben Sie eine Partition von $A \cup B$ an.

   (g) Berechnen Sie:

   i. $|\emptyset|$
   ii. $|\{\emptyset\}|$
   iii. $|A|$
   iv. $|B|$
   v. $|A \cup B|$
   vi. $|\mathcal{P}(A)|$
   vii. $|\mathcal{P}(B)|$
   viii. $|\mathcal{P}(A) \times B|$
   ix. $|\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \times \emptyset|$.

   (h) Sind die folgenden Ausdrücke jeweils (formal) korrekt? Falls nicht, begründen Sie Ihre Antwort!

   i. $\{\emptyset\}$
   ii. $\{a, \emptyset\}$
   iii. $\{a, \emptyset, \emptyset\}$
   iv. $\{\emptyset, \emptyset\}$
   v. $\{\{a\}, \emptyset, \emptyset\}$
   vi. $\{\{a, \emptyset\}, \emptyset\}$
   vii. $|A| = \{a, b, c, d\}$
   viii. $|B| = 3$
   ix. $|\{\emptyset\}| = 1$
   x. $\emptyset \in A$
   xi. $\emptyset \subset A$
   xii. $\emptyset \subset \emptyset$
   xiii. $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$
   xiv. $(a, 1) \subset A \times B$
   xv. $(\{b\}, b) \in A \times B$.

2. Betrachten Sie nachfolgende Tabelle als die Definition zweier Funktionen bzw. statistischer Variablen $A$ und $G$.
   $A$ ordnet jeder Person ein Alter (aus $\{0, 1, \ldots, 100\}$) zu, $G$ den angestrebten akademischen Grad (0: Diplom, 1: B.A.).

| $\omega$ | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_3$ | $\omega_4$ | $\omega_5$ | $\omega_6$ | $\omega_7$ | $\omega_8$ | $\omega_9$ | $\omega_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A(\omega)$ | 30 | 35 | 18 | 24 | 22 | 22 | 54 | 22 | 19 | 22 |
| $G(\omega)$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

   (a) Geben Sie den Definitionsbereich $\Omega$ der Funktionen $A$ und $G$ explizit als Menge an.

   (b) Geben Sie den realisierten Merkmalsraum von $A$ explizit als Menge an.

   (c) Berechnen Sie: $A(\omega_{10})$, $A(\{\omega_5, \omega_6, \omega_8\})$, $G(\Omega)$, $G(\{\omega_1, \omega_2\})$ $A^{-1}(\{36\})$ und $A^{-1}(\{36, 37, 22\})$.

(d) Geben Sie die Menge $G^{-1}(\{0\})$ an. Wie lässt sich diese Menge interpretieren?

(e) Geben Sie außerdem $A^{-1}(\{a \mid a \leq 20\})$ und $G^{-1}(\{g \mid g \neq 1\})$ an.

(f) Fassen Sie die beiden Funktionen zu einer 2-dimensionalen statistischen Variablen zusammen und verwenden Sie die Ihnen aus der Vorlesung bekannte Notation um auszudrücken, dass Person 8 ein 22-jähriger B.A.-Student ist.

3. Es sei $X : \Omega \longrightarrow \widetilde{X}$ eine statistische Variable. Ist $|X(\Omega)|$ gleich, größer oder kleiner als $|\Omega|$?

4. Es seien $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ und $\Phi := \{\omega_a, \omega_b\}$ zwei Mengen.

   (a) Berechnen Sie die kartesischen Produkte $\Omega \times \Omega$, $\Omega \times \Phi$ und $\Phi \times \Phi$.

   (b) Geben Sie aus jedem der Kreuzprodukte eine beliebige Teilmenge an.

## Relationen

5. Im folgenden werden einige Relationen definiert. Geben Sie für jede Relation an, ob die Eigenschaften der Reflexivität, der Symmetrie und der Transitivität erfüllt sind.

   a) Es sei $\Omega$ eine Menge von Tischen, von denen einge drei, einige vier, einige 6 Beine haben. Die Relation $\sim$ sei durch „... hat die gleiche Anzahl von Beinen wie ...“ definiert.

   b) Es sei $\Omega$ die Menge aller ganzen Zahlen, und die Relation $\sim$ sei durch „... ist kleiner als ...“ definiert.

   c) Es sei $\Omega$ die Menge aller ganzen Zahlen, und die Relation $\sim$ sei durch „... ist kleiner oder gleich ...“ definiert.

   d) Es sei $\Omega$ die Menge aller ganzen Zahlen, und die Relation $\sim$ sei durch „... ist ungleich ...“ definiert.

   e) Es sei $\Omega$ die Menge aller Teilnehmer unserer Veranstaltung und $\sim$ sei durch „... hat am gleichen Tag an der gleichen Übungsgruppe teilgenommen wie ...“ definiert.

6. Geben Sie für jede der in Aufgabe 5 definierten Relationen an, ob es sich um eine Äquivalenzrelation handelt oder nicht.

7. Es sei $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, und die Relation $\sim$ sei durch „... ist kleiner oder gleich ...“ definiert. Zur Kodierung werden die Zahlen 0 (wenn die Relation nicht zutrifft) bzw. 1 (wenn die Relation zutrifft) verwendet. Stellen Sie die Relation durch eine Adjazenzmatrix dar.

8. Es sei $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ und

$$R := \{(1,3), (1,5), (2,7), (7,2), (3,8)\}$$

   eine Teilmenge von $\Omega \times \Omega$. Stellen Sie die durch $R$ definierte Relation für $\Omega$ durch eine Adjazenzmatrix dar (Kodierungsschema wie in Aufg. 7).

9. Es sei wieder $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Jetzt wird die Relation $\sim$ durch „... ist identisch mit ...“ definiert.

a) Handelt es sich um eine Äquivalenzrelation?

b) Stellen Sie die Relation durch eine Adjazenzmatrix dar. (Kodierungsschema wie in Aufg. 7.)

10. Es sei jetzt $\Omega := \{1, 2, 3, 4\}$. Geben Sie eine Teilmenge $R \subset \Omega \times \Omega$ an, so dass die durch $R$ definierte Relation zwar transitiv, aber weder symmetrisch noch reflexiv ist.

11. Stellen Sie die in der vorangegangenen Aufgabe gefundene Relation durch eine Adjazenzmatrix dar.

12. Es sei $\Omega := \{1, \ldots, 10\}$ und eine Relation durch die nachfolgende Adjazenzmatrix gegeben. Ist die Relation reflexiv, symmetrisch, transitiv? (Kodierung wie bisher: 1 wenn die Relation besteht, 0 andernfalls.)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 7 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

13. Inwiefern sind statistische und relationale Variablen vergleichbar? Worin liegt der wesentliche Unterschied?

## Graphen und Netzwerke

14. Betrachten Sie die folgende Adjazenzmatrix als Definition eines ungerichteten und unbewerteten Graphen. (Stellen Sie sich die leeren Felder in der Adjazenzmatrix als mit Nullen gefüllt vor).

| | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_3$ | $\omega_4$ | $\omega_5$ | $\omega_6$ | $\omega_7$ | $\omega_8$ | $\omega_9$ | $\omega_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\omega_1$ | | | | | | 1 | 1 | 1 | | |
| $\omega_2$ | | | | | 1 | | | | | |
| $\omega_3$ | | | | 1 | 1 | | | | | |
| $\omega_4$ | | | 1 | | 1 | | | | | |
| $\omega_5$ | | 1 | 1 | 1 | | | | | | |
| $\omega_6$ | 1 | | | | | | 1 | 1 | | |
| $\omega_7$ | 1 | | | | | 1 | | 1 | | |
| $\omega_8$ | 1 | | | | | 1 | 1 | | 1 | |
| $\omega_9$ | | | | | | | | 1 | | |
| $\omega_{10}$ | | | | | | | | | | |

(a) Stellen Sie den durch die Adjazenzmatrix definierten Graphen graphisch dar!

(b) Aus wie vielen Komponenten besteht der Graph? Wie viele Cliquen enthält der Graph? Geben Sie für die Cliquen jeweils Größe und Mitglieder an.

(c) Geben Sie für jeden Knoten seinen Grad an.

(d) Ist die durch den Graphen definierte Relation reflexiv, symmetrisch, transitiv?

(e) Berechnen Sie die Netzwerkdichte.

(f) Geben Sie alle Wege ohne Kantenwiederholungen an, die von Knoten 1 zum Knoten 6 führen. Geben Sie zudem jeweils die Weglänge an.

(g) Berechnen Sie die dazugehörige Matrix der kürzesten Wege.

15. Folgender Graph ist gegeben:

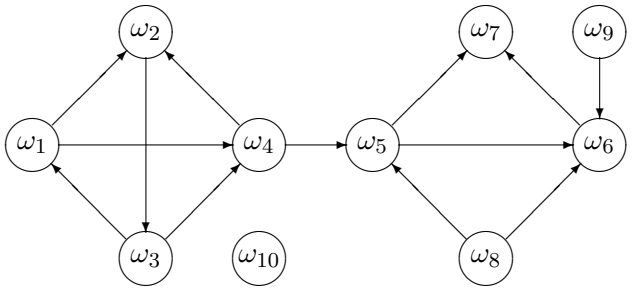
$$\mathcal{G} := (\{\omega_1, \ldots, \omega_8\}, \{(\omega_1, \omega_3), (\omega_1, \omega_5), (\omega_2, \omega_3), (\omega_4, \omega_2), (\omega_7, \omega_8), (\omega_3, \omega_4)\})$$

(a) Zeichnen Sie den Graphen.

(b) Geben Sie jeweils an, ob nachfolgende Graphen Teilgraphen des oben definierten Graphen sind oder nicht. Begründen Sie Ihre Antwort.

$\mathcal{G}_1 := (\{\omega_1, \omega_4, \omega_5\}, \{(\omega_1, \omega_5)\})$
$\mathcal{G}_2 := (\{\omega_1, \omega_3, \omega_6\}, \{(\omega_3, \omega_1)\})$
$\mathcal{G}_3 := (\{\omega_1, \ldots, \omega_6\}, \{\{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_5\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_4, \omega_2\}\})$
$\mathcal{G}_4 := (\{\omega_1, \omega_3, \omega_8\}, \emptyset)$
$\mathcal{G}_5 := (\{\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}, \{(\omega_1, \omega_3), (\omega_1, \omega_5), (\omega_2, \omega_3), (\omega_3, \omega_4)\})$
$\mathcal{G}_6 := (\{\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}, \{(\omega_1, \omega_3), (\omega_1, \omega_5)\})$
$\mathcal{G}_7 := (\{\omega_1, \omega_9, \omega_4, \omega_5\}, \{(\omega_1, \omega_9), (\omega_1, \omega_4)\})$

16. Diese Aufgabe bezieht sich auf den nachfolgend dargestellten gerichteten und unbewerteten Graphen.




(a) Stellen Sie die durch den Graphen repräsentierte Relation in Form einer Adjazenzmatrix dar.

| | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_3$ | $\omega_4$ | $\omega_5$ | $\omega_6$ | $\omega_7$ | $\omega_8$ | $\omega_9$ | $\omega_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\omega_1$ | | | | | | | | | | |
| $\omega_2$ | | | | | | | | | | |
| $\omega_3$ | | | | | | | | | | |
| $\omega_4$ | | | | | | | | | | |
| $\omega_5$ | | | | | | | | | | |
| $\omega_6$ | | | | | | | | | | |
| $\omega_7$ | | | | | | | | | | |
| $\omega_8$ | | | | | | | | | | |
| $\omega_9$ | | | | | | | | | | |
| $\omega_{10}$ | | | | | | | | | | |

(b) Berechnen Sie die dazugehörige Erreichbarkeitsmatrix.

(c) Aus wie vielen Komponenten und aus wie vielen Semikomponenten besteht der Graph?

(d) Wie viele Cliquen und wie viele Semicliquen enthält der Graph? Geben Sie für die Cliquen jeweils Größe und Mitglieder an.

(e) Geben Sie für jeden Knoten seinen Eingangs- und Ausgangsgrad an.

(f) Handelt es sich um einen zyklischen Graphen? Wenn ja, geben Sie sämtliche Zyklen an.

(g) Ist die durch den Graphen definierte Relation reflexiv, symmetrisch, transitiv?

(h) Berechnen Sie die Netzwerkdichte.

17. Nachfolgende Kantenliste gibt die Kapitalverflechtungen zwischen sechs Unternehmen an ($v_{ij}$ : Kantenbewertung, Anteil des vom Unternehmen i am Unternehmen j gehaltenen Kapitals, Angaben in %):

| $\omega_i$ | $\omega_j$ | $v_{ij}$ |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 25 |
| 2 | 3 | 51 |
| 2 | 4 | 30 |
| 2 | 5 | 55 |
| 2 | 6 | 60 |
| 3 | 1 | 25 |
| 3 | 5 | 55 |
| 5 | 4 | 30 |
| 6 | 1 | 30 |

(a) Zeichnen Sie den durch die Kantenliste definierten Graphen.

(b) Stellen Sie sämtliche direkte und indirekte Kontrollmöglichkeiten zwischen den Unternehmen dar.
(Verwenden Sie die Begriffe „direkte und indirekte Kontrolle“ so wie sie in der Vorlesung und im Skript (S. 62) definiert wurden.)

(c) Gibt es Unternehmen, die von keinen anderen Unternehmen kontrolliert werden können?

(d) Welche Unternehmen können keine anderen Unternehmen kontrollieren?

(e) Enthält der Graph Zyklen? Was könnte dies inhaltlich bedeuten?

## Matrizenrechnung

Für die folgenden Aufgaben sind die Matrizen

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

sowie die Vektoren

$$\mathbf{d} := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e} := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

gegeben.
$\mathbf{I_n}$ bezeichnet die Einheitsmatrix der Ordnung (n x n) und $\mathbf{0_{(n,m)}}$ die Nullmatrix der Ordnung (n x m).

1. Berechnen Sie:

   (a) $-\mathbf{A}$

   (b) $2\mathbf{B}$

   (c) $-3\mathbf{e}$

   (d) $-2\mathbf{e} + \mathbf{e}$

   (e) $3\mathbf{I_3}$

2. Kann $2\mathbf{d} - 3\mathbf{e}$ berechnet werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. Berechnen Sie:

   (a) $\mathbf{AB}$

   (b) $\mathbf{C}^2$

   (c) $\mathbf{Ad}$

(d) $\mathbf{eA}$

(e) $\mathbf{eAd}$

und geben Sie jeweils die Ordnung der Ergebnismatrix an.

4. Kann $\mathbf{B} * \operatorname{diag}(1,2,3)$ berechnet werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

5. Berechnen Sie:

   (a) $\mathbf{ed}$

   (b) $\mathbf{de}$

6. Berechnen Sie:

   (a) $\mathbf{A}'$

   (b) $\mathbf{A}'\mathbf{A}$

   (c) $\mathbf{B}'$

   (d) $\mathbf{B}'\mathbf{A}'$

   (e) $(\mathbf{AB})'$

   (f) $\mathbf{0_{(4,3)}}(\mathbf{AB})'$

7. $\mathbf{1_3}$ sei ein (3 x 1)-Spaltenvektor, der nur aus Einsen besteht. Berechnen Sie:

$$\frac{1}{3}\mathbf{1_3}'\mathbf{A}$$

und geben Sie eine inhaltliche Interpretation des Ergebnisses an.

Für die folgenden Aufgaben sind die Matrizen

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

8. Ist $\mathbf{B}$ die Inverse von $\mathbf{A}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

9. Ist die Matrix $\mathbf{C}$ invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

10. Es sei $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(6,3,4,2)$. Berechnen Sie $\mathbf{D^{-1}}$.

11. Berechnen Sie die Inverse der Matrix $\mathbf{F}$.

12. Sind die Spaltenvektoren von $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(6,3,4,2)$ linear abhängig oder unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

13. Berechnen Sie $\det(\mathbf{C})$ und $\det(\mathbf{F})$

14. $\mathbf{I_4}$ sei die Einheitsmatrix der Ordnung 4. Bestimmen Sie die Inverse, die Determinante sowie sämtliche Eigenwerte und -vektoren von $\mathbf{I_4}$.

15. Überprüfen Sie, ob die Zahl 1 ein Eigenwert von $\mathbf{A}$ ist, wenn $\mathbf{v}$ der dazugehörige Eigenvektor ist.

16. Normieren Sie $\mathbf{v}$ auf die Länge 1.

17. Geben Sie sämtliche Eigenwerte und -vektoren der Diagonalmatrix $\operatorname{diag}(1,3,2,1)$ an.

18. Ist $\mathbf{e} := (5,0,5,0)'$ ein Eigenvektor von $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(6,3,6,2)$? Wenn ja, was ist der dazugehörige Eigenwert?

19. Nachfolgende Kantenliste gibt die Kapitalverflechtungen zwischen vier Unternehmen an ($v_{ij}$ : Kantenbewertung, Anteil des vom Unternehmen i am Unternehmen j gehaltenen Kapitals, Angaben in %):

| $\omega_i$ | $\omega_j$ | $v_{ij}$ |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 40 |
| 2 | 3 | 55 |
| 2 | 4 | 20 |
| 4 | 3 | 60 |

(a) Zeichnen Sie den durch die Kantenliste definierten Graphen.

(b) Erstellen Sie die Matrix **A** des direkten Kapitalbesitzes zwischen den Unternehmen.

(c) Berechnen Sie die Matrix **Y** des direkten und indirekten Kapitalbesitzes zwischen den Unternehmen.
Hinweis: Die Inverse von (**I** - **A**) ist:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} := \begin{pmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.40 & 1.00 & 0.67 & 0.20 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.60 & 1.00 \end{pmatrix}$$

20. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass das Unternehmen 3 20% des Kapitals am Unternehmen 2 hält. Alle weiteren Kapitalverflechtungen entsprechen denen der vorangegangenen Aufgabe.

(a) Zeichnen Sie den dazugehörigen Graphen. Enthält der Graph Zyklen?

(b) Erstellen Sie die Matrix **A** des direkten Kapitalbesitzes zwischen den Unternehmen.

(c) Berechnen Sie diag $((\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-^1})^{-1}$

Hinweis: Die Inverse von (**I** - **A**) ist:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} := \begin{pmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.46 & 1.15 & 0.77 & 0.23 \\ 0.09 & 0.23 & 1.15 & 0.05 \\ 0.06 & 0.14 & 0.69 & 1.03 \end{pmatrix}$$

(d) Berechnen Sie die Matrix **Y** des direkten und indirekten Kapitalbesitzes zwischen den Unternehmen. (Verwenden Sie das Ergebnis aus der vorangegangenen Teilaufgabe.)

(e) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus der vorherigen Aufgabe.

## Modelle geselschaftlicher Güterproduktion

1. Die Vorleistungsmatrix $\mathbf{A}$ sei definiert wie im Skript S. 78. Berechnen Sie zu dem Bruttoproduktionsvektor

$$\mathbf{x} := (100, 60, 20, 60)'$$

   den zugehörigen Nettoproduktionsvektor.

2. Die Vorleistungsmatrix $\mathbf{A}$ sei definiert wie im Skript S. 78. Berechnen Sie zu dem Nettoproduktionsvektor

$$\mathbf{y} := (40, 10, 10, 80)'$$

   den zugehörigen Bruttoproduktionsvektor.

3. Angenommen, es soll in unserer Beispiel-Ökonomie (S. 78f) 10 Prozent mehr Getreide erzeugt werden. Um wieviel Prozent muss die Holz-, die Stahl-, die Fahrzeugproduktion erhöht werden?
   (Zunächst muss folgende Frage beantwortet werden: Hängt die Antwort vom bisherigen Produktionsniveau ab?)

4. Es ist folgende Produktionsmatrix gegeben:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 3 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.3 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$$

   Es soll untersucht werden, ob eine Ökonomie mit dieser Produktionsmatrix funktionieren kann. Ist die Matrix $(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})$ invertierbar? Ist das Ergebnis nicht-negativ? Man zeichne den Verflechtungsgraphen und diskutiere anhand dieses Graphen, welche Schwierigkeiten auftreten könnten.

5. Es sei $\pi_{1,3} = 0.5$. Wieviele Einheiten des Gutes $i$ benötigt die Produktionseinheit $j$, um 10 Einheiten des Gutes $j$ herzustellen?

6. Diese Aufgabe bezieht sich auf das Beispiel im Skript auf S. 78. Bilden Sie aus dem Bruttoproduktionsvektor $\mathbf{x}$ die Diagonalmatrix diag $(\mathbf{x})$. Bilden Sie dann die Inverse dieser Diagonalmatrix. Zeigen Sie schließlich, wie man aus dieser Inversen und der Vorleistungsmatrix $\mathbf{A}$ die Produktionsmatrix $\mathbf{\Pi}$ berechnen kann.

7. Auch diese Aufgabe bezieht sich auf das Beispiel im Skript auf S. 78. Berechnen Sie den Vektor der Vorleistungen, nämlich $\mathbf{\Pi x}$.

8. Es ist folgende Produktionsmatrix gegeben:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0.1 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Berechnen Sie die Matrix $(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})^{-1}$.

   (b) Welcher Bruttoproduktionsvektor ist erforderlich, um den Nettoproduktionsvektor $\mathbf{y} = (1, 1, 1, 1)'$ zu produzieren?

   (c) Berechnen Sie für jede Gütersorte, wieviel Vorleistungen direkt und indirekt erforderlich sind, um eine Einheit der Gütersorte zu produzieren.

   (d) Nehmen Sie an, dass die direkt erforderlichen Arbeitsstunden zur Produktion jeweils einer Gütereinheit durch folgenden Vektor gegeben sind:

$$\mathbf{w} = (2, 4, 6, 10)'$$

   Berechnen Sie die Arbeitswerte, d.h. wieviel Arbeit direkt und indirekt für jeweils eine Gütereinheit aufgewendet werden muss.