Dr. U. Pötter | SoSe 2005
Datengewinnung

Aufgabenblatt 5

Mengen und Funktionen

1) Gegeben sei die Menge A mit den Elementen $A := \{\alpha, \emptyset, \gamma, \{\emptyset\}\}$ und die Menge B mit den Elementen $B := \{\{\emptyset\}, \gamma, 5\}$.

   a) Geben Sie die Potenzmenge $\mathcal{P}(B)$ explizit an.

   b) Bilden Sie die Schnittmenge $A \cap B$, die Vereinigung $A \cup B$, und das kartesische Produkt $A \times B$.

   c) Sei $D = A \cup B$. Geben Sie das Komplement von B in D an.

   d) Geben Sie $\mid \mathcal{P}(A \times B) \mid$ und $\mid \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \mid$ an.

2) Es sei $\Omega := \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ und $\widetilde{\mathcal{X}} := \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$. Sei die Funktion $X : \Omega \longrightarrow \widetilde{\mathcal{X}}$ durch $X(\omega) = 2\omega - 2$ definiert.

   a) Berechnen Sie $X(2)$ und $X(-1)$.

   b) Berechnen Sie $X(\{-1, 0, 1\})$ und $X(\Omega)$.

   c) Berechnen Sie $X^{-1}(\{3\})$ und $X^{-1}(\{-2, 2\})$.

   d) Berechnen Sie $X(X^{-1}(\widetilde{\mathcal{X}}))$.

   e) Berechnen Sie $X^{-1}(\widetilde{\mathcal{X}} \setminus \{\tilde{x} \in \widetilde{\mathcal{X}} \,|\, \tilde{x} < -2\})$.

Stichproben

3) Sei $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_{20}\}$. Berechnen Sie die Anzahl aller Stichproben vom Umfang 5 aus Ω.

4) Sei $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_{20}\}$ und $A := \{A_1, \ldots, A_5\} := \{\{\omega_1, \ldots, \omega_4\}, \{\omega_5, \ldots, \omega_8\}, \{\omega_9, \ldots, \omega_{12}\}, \{\omega_{13}, \ldots, \omega_{16}\}, \{\omega_{17}, \ldots, \omega_{20}\}\}$ eine Partition von Ω.

   a) Wieviele Stichproben aus Ω vom Umfang 5 gibt es, wenn die Stichprobe folgendermaßen konstruiert wird: Aus $A_1, \ldots, A_5$ wird jeweils genau ein Element gezogen und zur Stichprobe hinzugefügt.

   b) Angenommen, ein Auswahlgenerator gibt allen Stichproben aus Teilaufgabe a) die gleiche Wahrscheinlichkeit. Berechnen Sie die Inklusionswahrscheinlichkeiten $\pi(\omega_1)$ und $\pi(\omega_5)$ sowie die Inklusionswahrscheinlichkeiten zweiter Ordnung $\pi(\omega_1, \omega_2)$ und $\pi(\omega_1, \omega_5)$.

5) Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $S^* := \{S_1, S_2, S_3\}$ mit $S_1 := \{\omega_1, \omega_2\}$, $S_2 := \{\omega_1, \omega_3\}$, $S_3 := \{\omega_2, \omega_3\}$ und $\Pr[\mathcal{G}](\{S_i\}) = 1/3$ für $i = 1, 2, 3$.

   a) Berechnen Sie $\Pr[\mathcal{G}](\{\{\omega_1, \omega_2\}\})$.

   b) Hat das Design einen festen Stichprobenumfang?

   c) Geben Sie die effektive Auswahlgesamtheit an.

   d) Geben Sie $\dot{I}_{\omega_1}(S_1), \dot{I}_{\omega_2}(S_1), \dot{I}_{\omega_3}(S_1)$ an.

   e) Berechnen Sie $\pi(\omega_1), \pi(\omega_2), \pi(\omega_3)$.

   f) Berechnen Sie $\pi(\omega_1, \omega_2)$ und $\pi(\omega_1, \omega_3)$.

6) Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\Pr[\mathcal{G}](\{S\}) = 1/(2^{|\Omega|} - 1) = 1/7$ für alle $S \in S^* = \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset\}$.

   a) Berechnen Sie $\Pr[\mathcal{G}](\{\{\omega_1, \omega_2\}\})$.

   b) Hat das Design einen festen Stichprobenumfang?

   c) Berechnen Sie $\pi(\omega_1), \pi(\omega_2), \pi(\omega_3)$.

   d) Geben Sie die effektive Auswahlgesamtheit an.

   e) Berechnen Sie die durchschnittliche Stichprobengröße.

Stichprobenfunktionen

7) Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $S^* := \{S_1, S_2, S_3\}$ mit $S_1 := \{\omega_1, \omega_2\}$, $S_2 := \{\omega_1, \omega_3\}$, $S_3 := \{\omega_2, \omega_3\}$ und $\Pr[\mathcal{G}](\{S_i\}) = 1/3$ für $i = 1, 2, 3$. Sei außerdem $X(\omega_1) = 39, X(\omega_2) = 39, X(\omega_3) = 42$.

   a) Berechnen Sie $\mathrm{P}[X](\{42\})$ und $\mathrm{M}(X)$.

   b) Berechnen Sie $\dot{\mathrm{P}}[X](\{42\})(S)$ und $\dot{\mathrm{M}}[X](S)$ für alle $S \in S^*$.

   c) Berechnen Sie $\mathrm{M}[\mathcal{G}](\dot{\mathrm{P}}[X](42))$.

   d) Berechnen Sie $\mathrm{M}[\mathcal{G}](\dot{\mathrm{M}}[X])$. Ist $\dot{\mathrm{M}}[X]$ erwartungstreu bezüglich $\mathcal{G}$?

   e) Berechnen Sie $\mathrm{V}[\mathcal{G}](\dot{\mathrm{M}}[X])$.

   f) Berechnen Sie $\Pr[\mathcal{G}]\left(\{S \in S^* \mid a \leq |\dot{\mathrm{M}}[X](S) - \mathrm{M}[\mathcal{G}](\dot{\mathrm{M}}[X])|\}\right)$ für $a = 0.5, 1, 2$.