Aufgabenblatt 4

Zählen

1) Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus 10 Personen 5 Gruppen mit jeweils 2 Personen zu bilden?

2) Zeigen Sie:

   a)
   $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

   b)
   $$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

   c)
   $$\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$$

   d)
   $$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i} = 0$$

   Hinweis: Benutzen Sie die Binomial-Formel für $(1-x)^n$.

Stichproben

3) Sei $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ und $\mathcal{S}_3$ die Menge aller drei-elementigen Teilmengen von Ω. Sei $\Pr[\mathcal{G}_3](\{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}\}) = 0.5$ und $\Pr[\mathcal{G}_3](\{S\}) = 1/6$ für alle anderen $S \in \mathcal{S}_3$.

   a) Berechnen Sie die Inklusionswahrscheinlichkeiten $\pi(\omega_1), \pi(\omega_2), \pi(\omega_3)$ und $\pi(\omega_4)$.

   b) Berechnen Sie die Inklusionswahrscheinlichkeiten zweiter Ordnung, $\pi(\omega_i, \omega_j)$ für alle $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

4) Sei $X : \Omega \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}}$ und $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Sei X durch

ω	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$X(\omega)$	0	-0.5	1	0.34

   gegeben. Seien Stichproben wie in Aufgabe 3) definiert.

   a) Berechnen Sie den Mittelwert von X, $\mathrm{M}(X)$.

   b) Berechnen Sie alle Mittelwerte $\mathrm{M}(X_S)$ für Stichproben $S \in \mathcal{S}_3$.

   c) Berechnen Sie den Mittelwert $\mathrm{M}[\mathcal{G}_3](\mathrm{M}(X_S))$ aller Mittelwerte aus Aufgabenteil b) mit den Wahrscheinlichkeiten aus Aufgabe 3). Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Mittelwert $\mathrm{M}(X)$.

   d) Sei nun $\Pr[\mathcal{G}_3](\{S\}) = 1/4$ für alle $S \in \mathcal{S}_3$. Berechnen Sie wieder $\mathrm{M}[\mathcal{G}_3](\mathrm{M}(X_S))$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit $\mathrm{M}(X)$.

5) Sei
   $$\dot{U}[X] := \frac{1}{4}\sum_{\omega\in\Omega}\frac{\dot{I}_\omega(S)}{\pi(\omega)}X(\omega)$$
   eine Stichprobenfunktion, d.h. eine Funktion mit dem Definitionsbereich $\mathcal{S}_3$. Seien dabei Ω, $\mathcal{S}_3$ und die Auswahlwahrscheinlichkeiten $\pi(\omega)$ wie in Aufgabe 3). Weiterhin sei die statistische Variable X wie in Aufgabe 4) definiert.

   a) Berechnen Sie $\dot{U}[X](\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\})$ und $\dot{U}[X](\{\omega_2, \omega_3, \omega_4\})$.

   b) Berechnen Sie $\mathrm{M}[\mathcal{G}_3](\dot{U}[X])$.

Rechnen mit dem Summenzeichen

6) Sei $T_n := \sum_{i=0}^{n} i2^i$.

   a) Berechnen Sie T_0, T_1, T_2, T_3 und T_4.

   b) Zeigen Sie: $T_n = (n-1)2^{n+1} + 2$

7) Berechnen Sie $U_n := \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}$, $V_n := \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}i$, $W_n := \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}i^2$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

8) Zeigen Sie:
   $$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i} x_i x_j$$