Dr. U. Pötter SoSe 2005
Datengewinnung

Aufgabenblatt 1

Mengen

1) Es sei $A := \{1, 2, 3, 4\}$ und $B := \{3, 4, 5\}$.

   a) Schreiben Sie $A \cup B$ und $A \cap B$ explizit als Mengen.
   b) Bilden Sie die Potenzmengen von A und B.
   c) Bilden Sie das kartesische Produkt $A \times B$ und schreiben Sie es explizit als eine Menge.

2) Gegeben sei die Menge A mit den Elementen $A := \{\alpha, \emptyset, \gamma, \{\alpha\}\}$ und die Menge B mit den Elementen $B := \{\{\alpha\}, \gamma, 5\}$.

   a) Geben Sie die Potenzmenge $\mathcal{P}(B)$ explizit an.
   b) Bilden Sie die Schnittmenge $A \cap B$, die Vereinigung $A \cup B$, und das kartesische Produkt $A \times B$.

3) Geben Sie jeweils ein Beispiel und zeigen Sie dann:

   a) $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cap B = A$
   b) $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cup B = B$
   c) $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Longrightarrow A \cup B \subseteq C$
   d) $C \subseteq A \wedge C \subseteq B \Longrightarrow C \subseteq A \cap B$

4) Geben Sie ein Beispiel einer Menge A an, für die $\emptyset \in A$. Geben Sie ein Beispiel einer Menge B an, für die $\emptyset \notin B$. Gilt $\emptyset \in \emptyset$?

5) Bilden Sie ein Beispiel und zeigen Sie: $X \times Y = \emptyset \Longleftrightarrow X = \emptyset \vee Y = \emptyset$

6) Sei $X \times Y \neq \emptyset$. Geben Sie jeweils ein Beispiel an und zeigen Sie dann:

   a) $A \times B \subseteq X \times Y \Longleftrightarrow A \subseteq X \wedge B \subseteq Y$
   b) Was passiert in a), wenn $X \times Y = \emptyset$? Geben Sie ein Beispiel oder ein Gegenbeispiel für die beiden Implikationen in a) an.
   c) $(X \times Y) \cup (Z \times Y) = (X \cup Z) \times Y$
   d) $(X \times Y) \cap (U \times V) = (X \cap U) \times (Y \cap V)$

7) Die *Differenz* der Mengen A und B, geschrieben $A \setminus B$, ist die Menge der Elemente aus A, die nicht Element von B sind:

$$A \setminus B := \{a \in A \,|\, a \notin B\}$$

   Ist $B \subseteq A$, dann heißt $B^c := A \setminus B$ das *Komplement* von B in A. Seien nun $A, B \subseteq C$. Zeigen Sie:

   a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
   b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

8) Fassen Sie folgende Ausdrücke zusammen:

   a) $(A \cap B) \cup (A \cap B)$
   b) $(A \cup B) \cap (A \cup B)$
   c) $A \cap (A \cup B)$
   d) $(A^c)^c$
   e) $A \cap (A^c \cup B)$

9) Geben Sie jeweils ein Beispiel an und zeigen Sie:

   a) $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$
   b) $A \cap (A \setminus B) = A \setminus B$
   c) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$
   d) $(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$
   e) $(A \cap B) \setminus B = \emptyset$
   f) $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$
   g) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
   h) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

10) Es gilt folgende Beziehung: $\forall C, D$: Wenn $C \cap D = \emptyset$, so ist $| C \cup D | = | C | + | D |$. Zeigen Sie zeichnerisch (Venndiagramm), dass im Allgemeinen

$$| A \cup B | = | A \setminus B | + | B \setminus A | + | B \cap A |$$

   gilt. Folgern Sie:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

11) Für drei Mengen A, B, C sei bekannt: $|A| = 15, |B| = 13, |C| = 16$, sowie $|A \cap B| = 8, |A \cap C| = 7, |B \cap C| = 9$ und $|A \cap B \cap C| = 5$. Gesucht ist $|A \cup B \cup C|$.