Dr. U. Pötter SoSe 2005
Statistik I

Aufgabenblatt 7

Mengen

1) Gegeben sei die Menge A mit den Elementen $A := \{\{\|\}, \odot\}$ und die Menge B mit den Elementen $B := \{1, 2, \odot\}$.

   a) Geben Sie die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ explizit an.
   b) Bilden Sie die Schnittmenge $A \cap B$, die Vereinigung $A \cup B$, und das kartesische Produkt $A \times B$.
   c) Es sei C die Menge $C := A \cup B$. Bilden Sie das Komplement B^c von B in C.
   d) Geben Sie $\mid \mathcal{P}(A \times B) \mid$ und $\mid \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \mid$ an.

Abbildungen

2) Es sei $\Omega := \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ und $\widetilde{\mathcal{X}} := \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$. Sei die Funktion $X : \Omega \longrightarrow \widetilde{\mathcal{X}}$ durch $X(\omega) = 2\omega - 2$ definiert.

   a) Berechnen Sie $X(2)$ und $X(-1)$.
   b) Berechnen Sie $X(\{-1, 0, 1\})$ und $X(\Omega)$.
   c) Berechnen Sie $X^{-1}(\{3\})$ und $X^{-1}(\{-2, 2\})$.
   d) Berechnen Sie $X(X^{-1}(\widetilde{\mathcal{X}}))$.
   e) Berechnen Sie $X^{-1}(\widetilde{\mathcal{X}} \setminus \{\tilde{x} \in \widetilde{\mathcal{X}} \mid \tilde{x} < -2\})$.

Verteilungen, Quantile, Mittelwerte, Varianzen

3) Betrachten Sie die folgenden 11 Werte der statistischen Variablen X:

ω	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	ω_{10}	ω_{11}
$X(\omega)$	1	3.4	7	2.7	5.9	36	-1	-15	7	22.2	-4

   a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F[X]$ und geben Sie die Werte in einer Tabelle an.
   b) Berechnen Sie den Mittelwert $M(X)$.
   c) Berechnen Sie die Quantile $Q_{0.5}(X)$ und $Q_{0.25}(X)$.
   d) Berechnen Sie die Varianz $V(X)$.

Verteilungen, bedingte Verteilungen und Kreuztabellen

4) Seien X und Y Variable mit Werten in $\widetilde{\mathcal{X}} \times \widetilde{\mathcal{Y}} = \{-1, 0, 1\} \times \{0, 1\}$. Die gemeinsamen relativen Häufigkeiten sei durch die folgenden Angaben gegeben:

$\tilde{x}$	-1	-1	0	0	1	1
$\tilde{y}$	0	1	0	1	0	1
$\mathrm{P}[X, Y](\{(\tilde{x}, \tilde{y})\})$	0.2	0.1	0.1	0.3	0.2	0.1

   a) Berechnen Sie die relativen Randhäufigkeiten von X und Y, also die Funktionen $\mathrm{P}[X]$ und $\mathrm{P}[Y]$.
   b) Berechnen Sie die relativen Häufigkeiten von $X + Y$, $\mathrm{P}[X + Y]$.
   c) Berechnen Sie den Mittelwert der Summe $X + Y$.
   d) Berechnen Sie die Varianzen von X und Y, $V(X)$ und $V(Y)$.
   e) Berechnen Sie die Kovarianz $\mathrm{cov}(X, Y)$.
   f) Berechnen Sie den bedingten Mittelwert $M(X \mid Y = 1)$.
   g) Berechnen Sie die bedingte Varianz $V(X \mid Y = 1)$.

5) Betrachten Sie die Häufigkeitsverteilung der drei statistischen Variablen A, B, C mit $\tilde{\mathcal{A}} = \{0, 1\}, \tilde{\mathcal{B}} = \{0, 1\}, \tilde{\mathcal{C}} = \{2, 3\}$. Ergänzen Sie die fehlenden Angaben in der folgenden Tabelle:

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">$A = 0$</td><td colspan="2">$A = 1$</td><td>$P[C]$</td></tr>
<tr><td></td><td>$B = 0$</td><td>$B = 1$</td><td>$B = 0$</td><td>$B = 1$</td><td></td></tr>
<tr><td>$C = 2$</td><td>0.02</td><td>?</td><td>?</td><td>?</td><td>0.32</td></tr>
<tr><td>$C = 3$</td><td>?</td><td>0.16</td><td>0.18</td><td>0.2</td><td>?</td></tr>
<tr><td>$P[A, B]$</td><td>?</td><td>?</td><td>0.28</td><td>0.32</td><td></td></tr>
<tr><td>$P[A]$</td><td colspan="2">?</td><td colspan="2">?</td><td></td></tr>
<tr><td>$P[B]$</td><td>?</td><td></td><td></td><td>?</td><td></td></tr>
</table>

Bedingte Mittelwerte und bedingte Varianzen

6) Seien X und Y zwei Variablen mit $\tilde{Y} = \{1, 2, 3\}$ und $\tilde{X} = \mathbf{R}$. Gegeben sind die relativen Häufigkeiten $\mathrm{P}[Y](\{1\}) = 0.2$, $\mathrm{P}[Y](\{2\}) = 0.4$ und $\mathrm{P}[Y](\{3\}) = 0.4$. Außerdem seien die bedingten Mittelwerte $M(X \mid Y = 1) = 10$ und $M(X \mid Y = 2) = 20$ und der Mittelwert $M(X) = 25$ sowie die bedingten Varianzen $V(X \mid Y = 1) = 2$, $V(X \mid Y = 2) = 4$ und die Varianz $V(X) = 121.5$ gegeben.

   a) Berechnen Sie den fehlenden bedingten Mittelwert, also $M(X \mid Y = 3)$.
   b) Berechnen Sie die fehlende bedingte Varianz, also $V(X \mid Y = 3)$.