Dr. U. Pötter SoSe 2005
Statistik I

Aufgabenblatt 1

Statistische Variablen

1) Sei Ω die Menge aller Gummibärchen in einer Tüte. In dieser befinden sich 2 grüne, 5 rote, 3 gelbe und 7 weiße Gummibärchen.

   a) Was sind die Elemente von Ω?

   b) Bestimmen Sie einen passenden Merkmalsraum $\widetilde{X}$.

   c) Geben Sie die statistische Variable $X : \Omega \to \widetilde{X}$ in der Form einer Tabelle explizit an.

2) Sei Ω die Menge der Gummibärchen wie in Aufgabe 1 und $\widetilde{X} = \{$rot, grün, gelb, weiß$\}$. Sei $X : \Omega \to \widetilde{X}$ die statistische Variable, die die Farbe der Gummibärchen bezeichnet. Bestimmen Sie $\mid X^{-1}(\{\text{rot}\}) \mid$ und $\mid X^{-1}(\{\text{grün,gelb}\}) \mid$.

3) Sei $X : \Omega \to \widetilde{X}$ die statistische Variable aus Aufgabe 1. Sei $f : \widetilde{X} \to \widetilde{\widetilde{X}}$ eine Vergröberung mit $\widetilde{\widetilde{X}} = \{$rot, nicht rot$\}$ und

$$f(\tilde{x}) = \begin{cases} \text{rot} & , \quad \tilde{x} \in \{ \text{ rot } \} \\ \text{nicht rot} & , \quad \tilde{x} \in \{ \text{ grün, gelb, weiß } \} \end{cases} .$$

   Bestimmen Sie für $X^* := f \circ X : \Omega \to \widetilde{\widetilde{X}}$ die Anzahl der roten und der nicht-roten Gummibärchen, also $\mid X^{*^{-1}}(\{\text{rot}\}) \mid$ und $\mid X^{*^{-1}}(\{\text{nicht rot}\}) \mid$.

4) Die folgende Tabelle gibt die beiden statistischen Variablen X_1 (Geschlecht, m männlich) und X_2 (Fachsemester) von 10 Studentinnen und Studenten an:

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	ω_{10}
X_1	w	m	m	m	w	w	w	w	m	w
X_2	1	2	3	2	3	6	3	2	1	1

   a) Geben Sie je einen Merkmalsraum für X_1 und X_2 an.

   b) Geben Sie $X_1^{-1}(\{m\})$ und $|X_1^{-1}(\{m\})|$ an.

   c) Schreiben Sie die Menge $X_2(X_1^{-1}(\{m\}))$ explizit auf.

   d) Schreiben Sie die Menge $X_2^{-1}(\{\tilde{x}|\tilde{x} \geq 3\})$ explizit auf.

   e) Schreiben Sie die Menge $X_2^{-1}(\{\tilde{x}|\tilde{x} \geq 3\}) \cap X_1^{-1}(\{w\})$ explizit auf.

Mengen und Abbildungen

5) Es sei $A := \{1, 2, 3, 4\}$ und $B := \{3, 4, 5\}$.

   a) Schreiben Sie $A \cup B$ und $A \cap B$ explizit als Mengen.

   b) Bilden Sie die Potenzmengen von A und B.

   c) Bilden Sie das kartesische Produkt $A \times B$ und schreiben Sie es explizit als eine Menge.

   d) Geben Sie $\mid A \mid$ und $\mid B \mid$ an.

   e) Bilden Sie zunächst das kartesische Produkt $\{a, b\} \times \{1, 2\}$ und geben Sie dann die Potenzmenge $\mathcal{P}(\{a, b\} \times \{1, 2\})$ an.

6) Es sei $A := \{1, 2, 3, 4\}$ und $B := \{1, \ldots, 20\}$, und außerdem sei eine Funktion $f : A \longrightarrow B$ durch $f(a) = a^2$ definiert.

   a) Berechnen Sie $f(2)$ und $f(3)$.

   b) Berechnen Sie $f(\{1, 2, 3\})$ und $f(A)$.

   c) Bilden Sie $f^{-1}(\{5\})$ und $f^{-1}(\{4, 5\})$.

   d) Zeigen Sie, dass $f^{-1}(f(A)) = A$ ist. Gilt das immer?

   e) Berechnen Sie $f(f^{-1}(B))$.

   f) Es sei $C := \{1, 4\}$ und $D := \{4, 9\}$. Zeigen Sie durch Ausrechnen, dass die Gleichungen

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$

   und

$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$

   richtig sind.

7) Fassen Sie folgende Ausdrücke zusammen:

   a) $(A \cap B) \cup (A \cap B)$

   b) $(A \cup B) \cap (A \cup B)$

   c) $A \cap (A \cup B)$

   d) $(A^c)^c$

   e) $A \cap (A^c \cup B)$