Kombinatorik

1. *Fakultät*

   $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 1; \quad$ dabei gilt: $0! = 1$

2. *Binomialkoeffizient*

   $$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}; \quad \text{dabei gilt: } \binom{N}{0} = 1$$

   (Anzahl der Teilmengen des Umfangs n, die aus einer Gesamtheit vom Umfang N gezogen werden können.)

Stichproben

1. *Menge der möglichen Stichproben vom Umfang n aus einer Gesamtheit Ω*

   $S_n := \{S \subseteq \Omega \mid |S| = n\}$

2. *Wahrscheinlichkeitsverteilung für einen Zufallsgenerator $\mathcal{G}_n$*

   $\Pr[\mathcal{G}_n] : \mathcal{P}(S_n) \longrightarrow [0,1]$

   Geforderte Eigenschaften:

   a) $\forall S \subseteq S_n : 0 \leq \Pr[\mathcal{G}_n](S) \leq 1$
   b) $\Pr[\mathcal{G}_n](\emptyset) = 0$ und $\Pr[\mathcal{G}_n](S_n) = 1$
   c) $\forall S, S' \subseteq S_n :$
      $S \cap S' = \emptyset \implies \Pr[\mathcal{G}_n](S \cup S') = \Pr[\mathcal{G}_n](S) + \Pr[\mathcal{G}_n](S')$

3. *Inklusionsvariable*

   $\dot{I}_\omega : S_n \longrightarrow \{0,1\}$

   $$\dot{I}_\omega(S) := \begin{cases} 1, \text{falls } \omega \in S \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$$

4. *Inklusionswahrscheinlichkeiten für Mitglieder ω einer Gesamtheit Ω*

   $\pi(\omega) : \Omega \longrightarrow [0,1]$

   $$\pi(\omega) := \sum_{S \ni \omega} \Pr[\mathcal{G}_n](\{S\}) = \sum_{S \in S_n} \dot{I}_\omega(S) \Pr[\mathcal{G}_n](\{S\})$$

5. *Zufallsvariable*

   Eine Zufallsvariable ist eine Funktion, deren Definitionsbereich der Kennzeichungsraum eines Zufallsgenerators ist. In unserem Fall von Stichprobengeneratoren $\mathcal{G}_n$ verwenden wir also deren Kennzeichnungsmenge S_n:

   $\dot{Y} : S_n \longrightarrow \tilde{\mathcal{Y}}$

   Ein einfaches Beispiel für eine Zufallsvariable ist die Inklusionsvariable (s. o.).

6. *Schätzfunktion*

   Eine Schätzfunktion hat allgemein die Form

   $$\dot{U}[X] : S_n \longrightarrow \mathbf{R} \quad \text{mit} \quad \dot{U}[X](S) := \sum_{\omega \in \Omega} g_\omega(X(\omega))\, \dot{I}_\omega(S)$$

   Mit Schätzfunktionen sollen Eigenschaften der Verteilung $\mathrm{P}[X]$ einer statistischen Variablen $X : \Omega \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}}$ geschätzt werden.

7. *Mittel- bzw. Erwartungswert von Zufallsvariablen*

   $$\mathrm{M}[\mathcal{G}_n](\dot{Y}) := \sum_{S \in S_n} \dot{Y}(S) \Pr[\mathcal{G}_n](\{S\})$$

   Insbesondere:

   $\mathrm{M}[\mathcal{G}_n](\dot{I}_\omega) = \pi(\omega)$

Binomialformel

$$\begin{aligned}(a+b)^n \quad &= \quad \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots \\ &\quad + \binom{n}{n-2} a^2 b^{n-2} + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n\end{aligned}$$

Besonders einfache Ausdrücke ergeben sich für $a, b \in \{-1, 0, 1\}$.