Methoden der Sozialstrukturforschung

II. Soziale und ökonomische Beziehungen

G. Rohwer
U. Pötter

Version 3 **April 2006**

Fakultät für Sozialwissenschaft
Ruhr-Universität Bochum, GB 1
44780 Bochum

goetz.rohwer@ruhr-uni-bochum.de

net3.tex April 2006

Vorwort

Dieses Skript soll als Begleittext für eine Lehrveranstaltung dienen, die sich mit „relationalen Daten" beschäftigt, also Daten, die in irgendeiner Weise Beziehungen zwischen Objekten (Menschen, Unternehmen, ...) erfassen. Der Text gliedert sich in folgende Kapitel.

1. Das erste Kapitel führt möglichst kurz einige formale Begriffsbildungen ein, erläutert den Begriff eines Graphen und die in diesem Text verwendeten Notationen.

2. Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit den Anfängen der Soziometrie, in der persönliche Beziehungen zwischen Menschen untersucht werden. Obwohl die Fragestellungen der Soziometrie für die Wirtschafts- und Sozialstrukturforschung nicht von zentraler Bedeutung sind, ist eine kurze Beschäftigung mit der Soziometrie sinnvoll, weil von ihr zahlreiche Anregungen für die Untersuchung „sozialer Netzwerke" ausgegangen sind und weil sich soziometrische Daten gut eignen, um einige formale Begriffsbildungen zu illustrieren.

3. Im dritten Kapitel wird besprochen, wie man mit Graphen praktisch arbeiten kann. In diesem Zusammenhang werden auch einige elementare Methoden zur Darstellung und Analyse von Graphen behandelt.

4. Im vierten Kapitel beginnt eine Beschäftigung mit Beziehungen zwischen Wirtschaftsunternehmen. Dabei werden drei Aspekte unterschieden. Beziehungen, die dadurch zustande kommen, dass Unternehmen durch Güterströme miteinander verbunden und voneinander abhängig sind, Beziehungen, die auf Kapitalverflechtungen beruhen, und Beziehungen, die durch personelle Verflechtungen zustande kommen. Im dritten Kapitel wird zunächst der letzte Aspekt besprochen und anhand von Daten illustriert.

5. Das fünfte Kapitel beschäftigt sich mit Kapitalverflechtungen. Da uns zur Zeit noch kein geeigneter Datensatz zur Verfügung steht, werden nur einige methodische Fragen besprochen.

6. Die weiteren Kapitel beschäftigen sich mit der gesellschaftlichen Produktion von Gütern. Im sechsten Kapitel wird ein einfaches Modell der Güterproduktion besprochen, in dem die Produzenten dadurch voneinander abhängig sind, dass sie Güter anderer Produzenten als Vorleistungen benötigen.

7. Das siebte Kapitel beschäftigt sich mit Marktpreisen. In diesem Kapitel wird auch besprochen, wie Preisindizes konstruiert werden.

8. Das achte Kapitel beschäftigt sich mit Input-Output-Tabellen zur empirischen Erfassung der gesellschaftlichen Produktion und Verwendung von Gütern. Als Datengrundlage dienen Input-Output-Tabellen des Statistischen Bundesamts.

9. Im neunten und zehnten Kapitel wird besprochen, wie man mit Input-Output-Tabellen praktisch arbeiten kann. Außerdem wird gezeigt, wie sich einige Überlegungen aus der Theorie der Graphen anwenden lassen und wie Input-Output-Tabellen aggregiert werden können.

Ein Ziel des Skripts bzw. der Lehrveranstaltung, die durch das Skript unterstützt werden soll, besteht darin, dass Leser bzw. Teilnehmer lernen, wie man die erforderlichen Berechnungen praktisch durchführen kann. Es werden deshalb, soweit möglich, empirisch erhobene Daten verwendet, um Gedankengänge und Rechnungen zu illustrieren. Für die Berechnungen wird das Computerprogramm TDA verwendet, das im Internet frei verfügbar ist: `http://www.stat.ruhr-uni-bochum.de/tda.html`.

Für die Darstellung werden Grundbegriffe der Matrizenrechnung verwendet, etwa in dem Umfang, wie sie im Anhang unseres Buches „Methoden sozialwissenschaftlicher Datenkonstruktion“ (2002) behandelt werden. Einige spezielle Ergebnisse für Verflechtungsmatrizen werden in einem Anhang dargestellt. Der Text beginnt mit einem kurzen Kapital, in dem einige elementare Notationen und Begriffsbildungen aus der Theorie der Graphen dargestellt werden. Alle darüber hinausgehenden Begriffsbildungen werden erst in späteren Kapiteln im Zusammenhang mit inhaltlichen Anwendungen besprochen.

Bochum, April 2003
G. Rohwer, U. Pötter

Anmerkung zu Version 3. Version 3 ist im Wesentlichen mit Version 2 identisch; einige sachliche und Schreibfehler wurden korrigiert.

Inhalt

Kapitel 1

Formale Begriffsbildungen

In diesem Kapitel werden einige formale Begriffsbildungen, mit denen über Beziehungen zwischen Objekten gesprochen werden kann, besprochen und anhand einfacher Beispiele illustriert.

1.1 Objekte und Relationen

1. Von Beziehungen wird in vielen unterschiedlichen Varianten geredet. Hier sind einige Beispiele:

– Zwei Menschen kennen sich oder sind befreundet oder sind verheiratet.

– Ein Mensch erzielt ein höheres Einkommen als ein anderer.

– Zwei Schüler sind Mitglieder derselben Schulklasse.

– Ein Mensch ist Angestellter eines bestimmten Unternehmes.

– Ein Unternehmen bezieht von einem anderen Unternehmen Vorleistungen für seine Güterproduktion.

– Zwei Computer sind durch ein Netzwerk verbunden, so dass Daten ausgetauscht werden können.

Dies sind Beispiele für *relationale Aussagen*: Aussagen, die sich gleichzeitig auf jeweils zwei (oder mehr) Objekte beziehen. Zu unterscheiden sind relationale Aussagen und Aussageformen. Zum Beispiel ist

Franz ist verheiratet mit Karin

eine *relationale Aussage*, die ihrer Intention nach einen Sachverhalt ausdrückt und infolgedessen wahr oder falsch sein kann. Dagegen ist

ω ist verheiratet mit ω'

eine *relationale Aussageform*. In diesem Fall sind ω und ω' *logische Variablen*. Relationale Aussagen, die wahr oder falsch sein können, entstehen erst dann, wenn man in die logischen Variablen (Leerstellen) bestimmte Namen einsetzt (z.B. Franz und Karin).

2. Um Schreibweisen abzukürzen, werden oft Symbole verwendet. In diesem Kapitel soll das Symbol $\sim$ dazu dienen, um auf relationale Ausdrücke zu verweisen. Wenn man inhaltlich bestimmte Aussagen machen möchte, muss natürlich eine Bedeutung vereinbart werden. Zum Beispiel könnte vereinbart werden: Das Symbol $\sim$ soll bis auf weiteres als Abkürzung für den relationalen Ausdruck 'ist verheiratet mit' verwendet werden. Unabhängig von der Vereinbarung einer bestimmten Bedeutung können jedoch mit dem Symbol $\sim$ relationale Aussageformen formuliert werden, die allgemein die Form

$$\omega \sim \omega'$$

haben. In dieser Schreibweise handelt es sich also um eine Aussageform. Erst wenn man $\sim$ eine bestimmte Bedeutung gibt und anstelle von ω und ω' Namen für bestimmte Objekte einsetzt, entsteht eine relationale Aussage, die wahr oder falsch sein kann.

3. Allerdings muss man wissen, auf welche Arten von Objekten man sich beziehen kann, um aus relationalen Aussageformen relationale Aussagen zu machen. Die Umgangssprache orientiert sich an der Bedeutung der relationalen Ausdrücke. Ist z.B. für das Symbol $\sim$ die Bedeutung 'ist verheiratet mit' vereinbart worden, ist auch klar, dass man nur dann zu sinnvollen Aussagen gelangt, wenn man für ω und ω' Namen von Menschen einsetzt. Für die weiteren Überlegungen soll angenommen werden, dass man sich jeweils auf eine explizit definierte Menge von Objekten beziehen kann, deren Elemente als Objekte für relationale Aussagen verwendet werden können. Zur symbolischen Repräsentation dient die Schreibweise

$$\Omega := \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$$

Hierbei sind $\omega_1, \ldots, \omega_n$ Namen für die Objekte, auf die man sich gedanklich beziehen möchte, und das Symbol Ω dient zum Verweis auf die Menge dieser Namen bzw. Objekte.

4. Nach diesen Vorüberlegungen kann der Begriff einer Relation, wie er im weiteren verwendet werden soll, explizit definiert werden. Eine *Relation* besteht aus drei Bestandteilen:

a) Es muss ein relationaler Ausdruck $\sim$ eingeführt werden, mit dem relationale Aussageformen der Gestalt $\omega \sim \omega'$ gebildet werden können. (Sobald man nicht nur rein formale Betrachtungen anstellen möchte, muss natürlich auch die inhaltliche Bedeutung angegeben werden.)

b) Es muss eine Objektmenge $\Omega := \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ angegeben werden, deren Elemente als Namen verwendet werden können, um relationale Aussagen bilden zu können.

c) Schließlich muss angegeben werden, welche der insgesamt möglichen relationalen Aussagen wahr bzw. falsch sind.

Es wäre also eine verkürzte und potentiell irreführende Redeweise, das Symbol $\sim$ eine Relation zu nennen. Dieses Symbol bildet nur ein Hilfsmittel zur Formulierung relationaler Aussagen. Die Relation selbst besteht vielmehr in der Gesamtheit der zutreffenden relationalen Aussagen, die

man mithilfe des relationalen Ausdrucks $\sim$ über alle möglichen Paare von Objekten in der Objektmenge Ω machen kann. Sobald man sich dies klargemacht hat, kann man natürlich von einer Relation $(\Omega, \sim)$ sprechen und auch abkürzend von einer Relation $\sim$, wenn der Bezug auf eine bestimmte Objektmenge durch den Kontext gegeben ist.

5. Ein einfaches Beispiel kann die Begriffsbildungen illustrieren. Die Objektmenge besteht aus 5 Personen: $\Omega := \{\omega_1, \ldots, \omega_5\}$, und es soll festgestellt werden, wer mit wem verheiratet ist. Die Bedeutung des Symbols $\sim$ wird also durch 'ist verheiratet mit' festgelegt. Mithilfe der Aussageform $\omega \sim \omega'$ können in diesem Beispiel auf insgesamt 25 unterschiedliche Weisen relationale Aussagen gebildet werden. Einige davon sind richtig, die übrigen sind falsch. Angenommen, dass ω_1 und ω_3 und ω_2 und ω_4 verheiratet sind, gibt es folgende Aussagen:

Zutreffende Aussagen	Unzutreffende Aussagen		
$\omega_1 \sim \omega_3$	$\omega_1 \sim \omega_1$	$\omega_2 \sim \omega_5$	$\omega_4 \sim \omega_4$
$\omega_3 \sim \omega_1$	$\omega_1 \sim \omega_2$	$\omega_3 \sim \omega_2$	$\omega_4 \sim \omega_5$
$\omega_2 \sim \omega_4$	$\omega_1 \sim \omega_4$	$\omega_3 \sim \omega_3$	$\omega_5 \sim \omega_1$
$\omega_4 \sim \omega_2$	$\omega_1 \sim \omega_5$	$\omega_3 \sim \omega_4$	$\omega_5 \sim \omega_2$
	$\omega_2 \sim \omega_1$	$\omega_3 \sim \omega_5$	$\omega_5 \sim \omega_3$
	$\omega_2 \sim \omega_2$	$\omega_4 \sim \omega_1$	$\omega_5 \sim \omega_4$
	$\omega_2 \sim \omega_3$	$\omega_4 \sim \omega_3$	$\omega_5 \sim \omega_5$

Die Relation besteht in diesem Beispiel aus der Gesamtheit der 25 Aussagen, von denen 4 zutreffend, die übrigen 21 nicht zutreffend sind.

6. Das Beispiel zeigt, dass sich eine Relation auf alle möglichen Paare von Objekten bezieht, die man aus den Elementen einer Objektmenge bilden kann. In der Mengenlehre verwendet man den Begriff eines kartesischen Produkts. Bezieht man sich allgemein auf zwei Mengen A und B, besteht ihr *kartesisches Produkt*, geschrieben $A \times B$, aus allen geordneten Paaren der Form (a, b), wobei a ein Element aus A und b ein Element aus B ist. Ist z.B. $A = \{a, b, c\}$ und $B = \{e, f\}$, erhält man:

$$A \times B = \{(a,e), (a,f), (b,e), (b,f), (c,e), (c,f)\}$$

Bei endlichen Mengen gilt offenbar

$$|\, A \times B \,| = |\, A \,| \cdot |\, B \,|$$

wobei, wenn M irgendeine endliche Menge ist, mit dem Ausdruck $|M|$ auf die Anzahl ihrer Elemente verwiesen werden soll.

7. Verwendet man diese Begriffsbildung, besteht eine Relation für eine Objektmenge Ω darin, dass für jedes Element

$$(\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega$$

angegeben wird, ob die relationale Aussage $\omega \sim \omega'$ zutrifft oder nicht. Infolgedessen kann man eine Relation für die Objektmenge Ω durch eine Teilmenge des kartesischen Produkts $\Omega \times \Omega$ festlegen, die genau diejenigen Paare (ω, ω') enthält, für die die relationale Aussage zutrifft. In unserem Beispiel:

$$R^* := \{(\omega_1, \omega_3), (\omega_3, \omega_1), (\omega_2, \omega_4), (\omega_4, \omega_2)\}$$

Diese Methode wird *Definition einer Relation durch ein kartesisches Produkt (einer Objektmenge mit sich selbst)* genannt. Somit kann man auch sagen, dass jeder Teilmenge von $\Omega \times \Omega$ eine jeweils spezifische Relation für die Elemente von Ω entspricht.

8. Eine andere Möglichkeit, um sich begrifflich auf Relationen für eine Objektmenge Ω zu beziehen, besteht in der Verwendung *relationaler Variablen*. Mit diesem Begriff sind (zunächst) Funktionen gemeint, die folgende Form haben:

$$R : \Omega \times \Omega \longrightarrow \{0, 1\}$$

R ist der Name der Funktion (der relationalen Variablen), $\Omega \times \Omega$ ist ihr Definitionsbereich und $\{0, 1\}$ ist ihr Wertebereich. Die Funktion (relationale Variable) R ordnet also jedem Element $(\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega$ einen Wert $R(\omega, \omega') \in \{0, 1\}$ zu, wobei folgende Bedeutung vereinbart wird:

$$R(\omega, \omega') = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \omega \sim \omega' \text{ zutrifft} \\ 0 & \text{wenn } \omega \sim \omega' \text{ nicht zutrifft} \end{cases}$$

Wie sich später zeigen wird, ist der Begriff einer relationalen Variablen sehr nützlich, weil er sich leicht verallgemeinern lässt, um in komplexerer Weise von Relationen zu sprechen. Außerdem gibt es eine gedanklich einfache Parallele zu statistischen Variablen, also zu Funktionen der Form

$$X : \Omega \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}}$$

die jedem Element einer Objektmenge Ω einen Merkmalswert in einem Merkmalsraum $\tilde{\mathcal{X}}$ zuordnen. Der Unterschied besteht nur darin, dass eine statistische Variable jedem einzelnen Objekt, eine relationale Variable dagegen jedem Paar von Objekten einen Merkmalswert zuordnet.

9. An dieser Parallele knüpft auch eine weitere Möglichkeit zur Darstellung von Relationen an. Beziehen wir uns zunächst auf eine statistische Variable $X : \Omega \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}}$. Ihre Werte (die Daten) können in Form einer Datenmatrix dargestellt werden, die folgende Form hat:

ω	$X(\omega)$
ω_1	$X(\omega_1)$
$\vdots$	$\vdots$
ω_n	$X(\omega_n)$

Jede Zeile bezieht sich auf jeweils ein Objekt der Objektmenge Ω. Die erste Spalte enthält den Namen des Objekts, die zweite Spalte den Merkmalswert, der dem Objekt durch die Variable zugeordnet wird. Auf ähnliche Weise kann man die Werte einer relationalen Variablen durch ein zweidimensionales Schema darstellen, das allgemein folgende Form hat:

	ω_1	$\cdots$	ω_n
ω_1	$R(\omega_1, \omega_1)$	$\cdots$	$R(\omega_1, \omega_n)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
ω_n	$R(\omega_n, \omega_1)$	$\cdots$	$R(\omega_n, \omega_n)$

Für das oben angeführte Beispiel erhält man folgende Darstellung:

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
ω_1	0	0	1	0	0
ω_2	0	0	0	1	0
ω_3	1	0	0	0	0
ω_4	0	1	0	0	0
ω_5	0	0	0	0	0

Wenn ein Schema dieser Art verwendet wird, um eine Relation darzustellen, spricht man von einer *Adjazenzmatrix*.

10. Zur formalen Charakterisierung von Relationen gibt es zahlreiche Begriffsbildungen. An dieser Stelle genügen die folgenden, zu deren Erläuterung angenommen wird, dass eine Relation $(\Omega, \sim)$ gegeben ist.

a) Die Relation $(\Omega, \sim)$ wird *reflexiv* genannt, wenn gilt:

   Für alle $\omega \in \Omega$: $\omega \sim \omega$

b) Die Relation $(\Omega, \sim)$ wird *symmetrisch* genannt, wenn gilt:

   Für alle $\omega, \omega' \in \Omega$: $\omega \sim \omega' \implies \omega' \sim \omega$

c) Die Relation $(\Omega, \sim)$ wird *transitiv* genannt, wenn gilt:

   Für alle $\omega, \omega', \omega'' \in \Omega$: $\omega \sim \omega'$ und $\omega' \sim \omega'' \implies \omega \sim \omega''$

Wenn alle drei Eigenschaften bestehen, spricht man auch von einer *Äquivalenzrelation*. Die oben als Beispiel verwendete Relation ist offenbar symmetrisch, jedoch weder reflexiv noch transitiv.

1.2 Notationen für Graphen

Ein weiteres Hilfsmittel zur Darstellung von Relationen sind Graphen. In den folgenden Abschnitten werden einige Grundbegriffe und Notationen eingeführt.

1.2.1 Ungerichtete Graphen

1. Unter einem *Graphen* versteht man allgemein eine Menge von *Knoten*, die durch *Kanten* (Linien oder Pfeile) verbunden sein können. Die Knoten entsprechen den Objekten, auf die man sich beziehen möchte, die Kanten werden zur Darstellung von Beziehungen zwischen den Knoten (Objekten) verwendet. Zur Notation wird die Schreibweise

$$\mathcal{G} := (\Omega, \mathcal{K})$$

verwendet, wobei $\Omega := \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ die *Knotenmenge* des Graphen und $\mathcal{K} := \{\kappa_1, \dots, \kappa_m\}$ die *Kantenmenge* des Graphen ist.

2. Diese Erläuterung zeigt bereits, dass es einen engen Zusammenhang zwischen Relationen und Graphen gibt. Zunächst besprechen wir *ungerichtete Graphen*, die den symmetrischen Relationen entsprechen. Sei also $(\Omega, \sim)$ eine symmetrische Relation. Dann kann man Ω auch als Knotenmenge eines Graphen betrachten und festlegen, dass es zwischen zwei Knoten $\omega, \omega' \in \Omega$ genau dann eine Kante gibt, wenn die relationale Aussage $\omega \sim \omega'$ zutrifft. Die Kantenmenge wird also durch

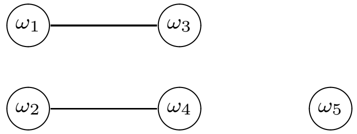
$$\mathcal{K} := \{\, \{\omega, \omega'\} \,|\, \omega \sim \omega' \text{ ist zutreffend} \,\}$$

definiert. Anstelle von geordneten Paaren der Form (ω, ω') werden in diesem Fall Mengen der Form $\{\omega, \omega'\}$ verwendet, da die Relation symmetrisch ist, so dass die Reihenfolge keine Rolle spielt.

3. Zur Illustration kann zunächst das bereits im vorangegangenen Abschnitt verwendete Beispiel dienen. In diesem Fall repräsentieren die Knoten die 5 Personen und die Kanten zeigen, welche der Personen miteinander verheiratet sind. In symbolischer Notation hat dieser Graph folgende Form:

$$\mathcal{G} := (\, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\},\ \{\{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_4\}\}\,)$$

4. Anhand dieses Beispiels kann auch die *graphische Darstellung* von Graphen erläutert werden. Jeder Knoten des Graphen wird durch einen Punkt (oder Kreis, Rechteck, ...) und jede Kante durch eine Verbindungslinie zwischen den zugehörigen Knoten dargestellt. In diesem Beispiel kann man folgende Darstellung verwenden:

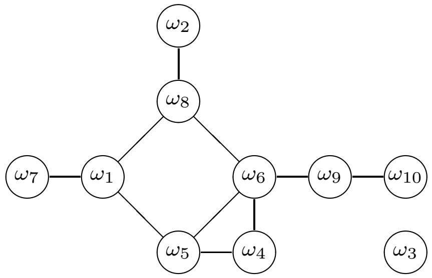


Die Anordnung der Knoten kann beliebig erfolgen, denn sie hat keine Bedeutung. Oft wählt man eine Anordnung, die möglichst keine oder nur wenige Überschneidungen der die Kanten repräsentierenden Linien erfordert. Ein Graph wird *planar* genannt, wenn man ihn vollständig ohne Überschneidungen darstellen kann.

5. Für ein weiteres Beispiel können Daten dienen, die in der ersten Stunde eines Seminars über soziale Netzwerke, an dem 10 Personen teilgenommen haben, erhoben wurden. Das Ziel war herauszufinden, welche Teilnehmer „sich bereits kennen“. Um das zu präzisieren, wurde folgende Fragestellung gewählt: Haben jeweils zwei der Teilnehmer vor Beginn des Seminars schon mindestens 5 Minuten miteinander gesprochen? Um die Daten zu gewinnen, wurde zunächst eine Liste der Teilnehmer erstellt:

$$\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}\}$$

Dann wurde jeder Teilnehmer gefragt, mit welchen anderen Seminarteilnehmern er bereits vor Beginn des Seminars mindestens 5 Minuten gesprochen hat. Tabelle 1.2.1 zeigt das Ergebnis in Gestalt einer Adjazenzmatrix. Sie beschreibt einen Graphen, dessen Knoten aus den 10 Teilnehmern des Seminars bestehen. Die Einsen geben die Kanten des Graphen an und bedeuten, daß zwischen den jeweils beteiligten Knoten eine „Beziehung“ besteht, in diesem Beispiel dadurch definiert, daß bereits vor Beginn des Seminars eine Kommunikation stattgefunden hat. Da es sich um eine symmetrische Relation handelt, ist auch die Adjazenzmatrix symmetrisch und man kann zur Repräsentation einen ungerichteten Graphen verwenden, wie folgende graphische Darstellung zeigt.



6. An dieser Stelle kann auch bereits ein weiterer Begriff erläutert werden:

Tabelle 1.2.1 Adjazenzmatrix der Seminardaten.

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	ω_{10}
ω_1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0
ω_2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
ω_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ω_4	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
ω_5	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
ω_6	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0
ω_7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ω_8	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
ω_9	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
ω_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

der *Grad eines Knotens*. Bei einem ungerichteten Graphen versteht man darunter die Anzahl der Kanten, die von dem Knoten ausgehen bzw. in ihn münden. Um den Grad eines Knotens ω zu bezeichnen, verwenden wir die Notation $g(\omega)$. Die Berechnung kann am einfachsten mithilfe der Adjazenzmatrix des Graphen erfolgen. Bezeichnet $\mathbf{A} = (a_{ij})$ die Adjazenzmatrix, gilt nämlich:

$$g(\omega_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}$$

In unserem Beispiel findet man:

ω	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	ω_{10}
$g(\omega)$	3	1	0	2	3	4	1	3	2	1

Offenbar liefert der Grad eines Knotens eine Information darüber, in welchem Ausmaß der Knoten in das Netzwerk eingebunden ist. Gibt es insgesamt n Knoten, kann der Grad eines Knotens bei einer nicht-reflexiven Beziehung maximal den Wert $n-1$ annehmen.[1] Der minimale Wert ist natürlich Null. Knoten, die den Grad Null haben, werden auch *isolierte Knoten* genannt.

1.2.2 Gerichtete Graphen

1. Oft sind Relationen nicht symmetrisch. Dann werden *gerichtete Graphen* verwendet. Zur symbolischen Notation kann wie bei ungerichteten

[1]Manchmal ist es auch erforderlich, Graphen zu betrachten, bei denen Knoten mit sich selbst verbunden sein können. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn es sich um eine reflexive Relation handelt. Zur graphischen Darstellung werden sog. *Schlingen* verwendet, d.h. Linien, die einen Knoten mit sich selbst verbinden.

Graphen die Formulierung

$$\mathcal{G} := (\Omega, \mathcal{K})$$

verwendet werden. Es muss nur berücksichtigt werden, dass bei gerichteten Graphen die Kantenmenge $\mathcal{K}$ aus *geordneten* Paaren von Knoten besteht, so dass bei zwei Knoten ω und ω' zwischen Kanten, die von ω zu ω' führen, und Kanten, die von ω' zu ω führen, unterschieden werden kann. Zur Unterscheidung wird von *gerichteten Kanten* gesprochen. In der graphischen Darstellung werden deshalb nicht Linien, sondern Pfeile verwendet.

2. Als Beispiel betrachten wir eine Objektmenge Ω, die aus 5 Unternehmen besteht. Mit den relationalen Aussagen der Form $\omega \sim \omega'$ soll erfasst werden, ob das Unternehmen ω' Produkte des Unternehmens ω als Vorleistungen verwendet. Es werden vielleicht folgende Beziehungen festgestellt:

$$\omega_1 \sim \omega_2, \quad \omega_3 \sim \omega_2, \quad \omega_4 \sim \omega_3, \quad \omega_4 \sim \omega_5$$

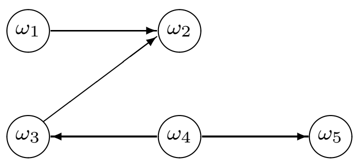
so dass die Adjazenzmatrix folgendermaßen aussieht:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Offenbar ist diese Adjazenzmatrix und dementsprechend auch die Relation nicht symmetrisch. Zur Darstellung wird deshalb ein gerichteter Graph verwendet, dessen Kantenmenge durch

$$\mathcal{K} := \{(\omega_1, \omega_2), (\omega_3, \omega_2), (\omega_4, \omega_3), (\omega_4, \omega_5)\}$$

definiert ist. Es handelt sich um gerichtete Kanten, und die graphische Darstellung sieht folgendermaßen aus:



3. Bei gerichteten Graphen muß unterschieden werden zwischen der Anzahl der Kanten, die in einen Knoten einmünden, und der Anzahl der Kanten, die von ihm ausgehen. Im ersten Fall spricht man vom *Eingangsgrad*, im zweiten Fall vom *Ausgangsgrad* eines Knotens. Bezieht man sich auf eine Adjazenzmatrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$, erhält man folgende Definitionen:[2]

$$g_a(\omega_i) := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad \text{und} \quad g_e(\omega_i) := \sum_{j=1}^{n} a_{ji}$$

In unserem Beispiel findet man folgende Werte:

ω	$g_a(\omega)$	$g_e(\omega)$
ω_1	1	0
ω_2	0	2
ω_3	1	1
ω_4	2	0
ω_5	0	1

Der Eingangsgrad eines Unternehmens gibt an, von wie vielen anderen Unternehmen es Vorleistungen bezieht; der Ausgangsgrad gibt an, an wie viele andere Unternehmen Güter als Vorleistungen abgegeben werden.

1.2.3 Bewertete Graphen

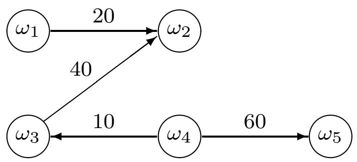
1. Bei einer Relation $(\Omega, \sim)$ wird nur festgestellt, ob für jeweils zwei Objekte $\omega, \omega' \in \Omega$ die relationale Aussage $\omega \sim \omega'$ zutrifft oder nicht. Zum Beispiel: Zwei Personen sind verheiratet oder nicht verheiratet. Oft ist es jedoch von Interesse, qualitative oder quantitative Unterschiede in der Art der Beziehung zu erfassen. Z.B. könnte man bei persönlichen Beziehungen zwischen Bekanntschaften und Freundschaften unterscheiden; oder bei dem im vorangegangenen Abschnitt verwendeten Beispiel könnte man unterscheiden, in welchem Ausmaß Vorleistungen bezogen werden. Um solche Unterscheidungen berücksichtigen zu können, werden *bewertete Graphen* verwendet: Jeder (gerichteten oder ungerichteten) Kante des Graphen wird dann eine Zahl zugeordnet, die die durch die Kante repräsentierte Beziehung charakterisiert.

2. Als Beispiel verwenden wir wieder eine Objektmenge, die aus 5 Unternehmen besteht. In diesem Fall soll es sich jedoch um Aktiengesellschaften handeln, so dass man feststellen kann, wie viel Prozent des Aktienkapitals eines Unternehmens von einem anderen Unternehmen gehalten wird. Solche Daten können wiederum in Form einer Adjazenzmatrix dargestellt werden, wobei jetzt aber in den einzelnen Feldern der Matrix die Prozentanteile des Kapitalbesitzes eingetragen werden. In unserem Beispiel sieht die Adjazenzmatrix vielleicht folgendermaßen aus:

[2] Bei der Darstellung eines gerichteten Graphen durch eine Adjazenzmatrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$ wird stets von der Konvention ausgegangen, dass die Richtung von i (Zeilen) zu j (Spalten) gegeben ist.

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Das Unternehmen ω_1 hält am Unternehmen ω_2 20 % der Kapitalanteile usw. Man erhält dann folgende graphische Darstellung:



3. Zur symbolischen Notation bewerteter Graphen wird in der Literatur oft die Formulierung

$$\mathcal{G} := (\Omega, \mathcal{K}, v)$$

verwendet. Ω ist die Knotenmenge, $\mathcal{K}$ die Kantenmenge. Hinzu kommt eine Funktion

$$v : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbf{R}$$

die jeder Kante $\kappa \in \mathcal{K}$ eine Zahl $v(\kappa) \in \mathbf{R}$ zuordnet und als *Bewertung der Kante* bezeichnet wird (wobei natürlich eine jeweils sinnvolle Bedeutung vereinbart werden muss). In unserem Beispiel sieht diese Funktion folgendermaßen aus:

κ	$v(\kappa)$
(ω_1, ω_2)	20
(ω_3, ω_2)	40
(ω_4, ω_3)	10
(ω_4, ω_5)	60

4. Als einheitlicher begrifflicher Rahmen für Graphen aller Art eignen sich am besten relationale Variablen, die in allgemeiner Weise als Funktionen der folgenden Form definiert sind:

$$R : \Omega \times \Omega \longrightarrow \tilde{\mathcal{R}}$$

Hierbei ist Ω eine Objektmenge und $\tilde{\mathcal{R}}$ ein im Prinzip beliebig konzipierbarer Merkmalsraum. Die relationale Variable R ordnet jedem Element $(\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega$ einen Merkmalswert $R(\omega, \omega') \in \tilde{\mathcal{R}}$ zu. Wie bereits besprochen wurde, genügt für unbewertete Graphen ein Merkmalsraum $\tilde{\mathcal{R}} := \{0, 1\}$, da nur unterschieden werden muss, ob zwischen zwei Objekten eine Beziehung besteht oder nicht. Wenn man differenziertere Merkmalsräume verwendet, können jedoch auch beliebige bewertete Graphen repräsentiert werden. Für das zuvor besprochene Beispiel kann man als Merkmalsraum z.B. die Zahlen von 0 bis 100 verwenden, und $R(\omega, \omega')$ bedeutet dann den Prozentanteil des Kapitals des Unternehmens ω', den das Unternehmen ω besitzt. Relationale Variablen bieten also sehr flexible Formulierungsmöglichkeiten. Außerdem lassen sich viele Überlegungen und Unterscheidungen, die für statistische Variablen bereits eingeführt worden sind, unmittelbar übertragen.

1.2.4 Bi-modale Graphen

1. Zum Abschluß soll noch kurz erwähnt werden, dass man sich auch für Beziehungen zwischen Objekten interessieren kann, die unterschiedlichen Arten von Objektmengen angehören. Als Beispiel kann man sich auf die Frage beziehen, an welchen Lehrveranstaltungen die Studenten eines bestimmten Studiengangs teilnehmen. Dann gibt es zwei Objektmengen. Erstens eine Objektmenge $\Omega := \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, die die Studenten repräsentiert, zweitens eine Objektmenge $\Omega^* := \{\omega_1^*, \ldots, \omega_m^*\}$, die die Lehrveranstaltungen repräsentiert. Ist nun $\omega \in \Omega$ und $\omega^* \in \Omega^*$, soll die Aussage $\omega \sim \omega^*$ bedeuten, dass der Student ω an der Lehrveranstaltung ω^* teilnimmt. Da es in diesem Fall zwei Objektmengen gibt, spricht man von einer *bi-modalen Relation* bzw. von einem *bi-modalen Graphen*. Daten können durch eine *bi-modale Adjazenzmatrix* erfasst werden, die folgende allgemeine Form hat:

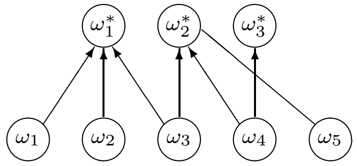
	ω_1^*	$\cdots$	ω_m^*
ω_1	a_{11}	$\cdots$	a_{1m}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
ω_n	a_{n1}	$\cdots$	a_{nm}

Wenn $a_{ij} = 1$ ist, nimmt der Student ω_i an der Lehrveranstaltung ω_j^* teil, andernfalls nicht.

2. Als Beispiel kann man sich vorstellen, dass es 5 Studenten und 3 Lehrveranstaltungen gibt und dass die bi-modale Adjazenzmatrix folgendermaßen aussieht:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Den entsprechenden bi-modalen Graphen kann man sich dann durch folgende Darstellung veranschaulichen:



3. Wiederum kann man auch relationale Variablen verwenden, die jetzt folgende allgemeine Form haben:

$$R : \Omega \times \Omega^* \longrightarrow \tilde{\mathcal{R}}$$

Jedem Element $(\omega, \omega^*) \in \Omega \times \Omega^*$ wird ein bestimmter Wert $R(\omega, \omega^*) \in \tilde{\mathcal{R}}$ zugeordnet, der entweder nur feststellt, ob eine Beziehung besteht, oder (bei einem bewerteten bi-modalen Graphen) diese Beziehung näher charakterisiert. Man spricht dann von einer *bi-modalen relationalen Variablen*.

Kapitel 2

Anfänge der Soziometrie

Eine wichtige Rolle in der Entwicklung relationaler Betrachtungsweisen in der Soziologie, Anthropologie und Sozialpsychologie spielte die Soziometrie, deren bekanntester Protagonist Jakob Moreno war. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit einigen Aspekten dieses Forschungsansatzes. Zwar liegt diesem Ansatz eine psychologische, nicht soziologische Betrachtungsweise sozialer Beziehungen zugrunde, in der es hauptsächlich um „affektive Beziehungen“ geht. Da jedoch viele bis heute verbreitete Begriffsbildungen im Rahmen der Soziometrie entwickelt worden sind, erscheint es sinnvoll, mit ihr zu beginnen.

2.1 Einleitende Bemerkungen

1. Morenos Grundgedanke kommt gut in einem kurzen Brief zum Ausdruck, den er 1916 an das österreichische Ministerium des Inneren schrieb:[1]

„Die positiven und negativen Gefühlsströmungen innerhalb jedes Hauses und zwischen den Häusern, innerhalb der Fabrik und zwischen den verschiedenen religiösen, nationalen und politischen Gruppen des Lagers können durch eine soziometrische Analyse der Beziehungen, die zwischen den Bewohnern waltet, aufgedeckt werden. Eine Neuordnung mit Hilfe soziometrischer Methoden ist hiermit anempfohlen.“

Dies blieb auch in Morenos späteren Arbeiten der Grundgedanke: dass es bei der empirischen Erforschung sozialer Beziehungen zunächst und primär erforderlich sei, die affektiven Beziehungen zwischen Menschen, in wie auch immer abgegrenzten Gruppen, zu ermitteln und daraus die „Strukturen“ ihrer Gruppenbildung zu rekonstruieren.

2. Dementsprechend wird die Soziometrie in einem neueren Lehrbuch von Wasserman und Faust (1994, S. 77) folgendermaßen charakterisiert:

“Sociometry is the study of positive and negative affective relations, such as liking/disliking of friends/enemies, among a set of people. A social network data set consisting of people and measured affective relations between people is often referred to as *sociometric*.”

Diese Charakterisierung ist jedoch problematisch. Zwar ist richtig, dass es Moreno und auch der von ihm ins Leben gerufenen „soziometrischen Bewegung“ (wie sie sich etwa in der von ihm 1937 gegründeten Zeitschrift

[1] Einen Auszug aus diesem Brief findet man als Faksimile zu Beginn von Morenos „Who shall survive? Foundations of Sociometry, Group Psychotherapy and Sociodrama“ (1953, 1. Auflage 1934).

„Sociometry. A Journal of Inter-Personal Relations“ darstellt) in erster Linie um eine Erfassung und Analyse affektiver Beziehungen ging. Jedoch war nicht nur das Programm von Anfang an weiter gespannt;[2] es entwickelten sich auch zunehmend Forschungsansätze, und zwar bereits im ideologischen und institutionellen Rahmen der „soziometrischen Bewegung“, in denen nicht nur affektive Beziehungen, sondern auch empirisch ermittelbare Interaktionen thematisiert wurden.

3. Eine wesentlich allgemeinere Definition findet sich z.B. bereits in den 50 er Jahren in einem Buch über „Research methods in social relations“ von Selltiz, Jahoda, Deutsch und Cook (1959, S. 268):

“Sociometry is concerned with the social interactions among any group of people. The data collection is geared to obtaining information about the interaction or lack of interaction among the members of any group (or among subgroups, or among groups, or among groups and individual members, etc.). The interaction that is investigated may be behavioral, or it may only be desired, or anticipated, or fantasied. The content or type of interaction studied may be any one of a variety of social behaviors – sitting next to, eating with, bying from, lending to, visiting, playing with, having as a friend, talking to, living next to, etc.”

Offenbar denken die Autoren nicht nur an affektive Beziehungen, sondern gleichermaßen daran, wie sich Menschen in Interaktionsprozessen verhalten. Außerdem wird angedeutet, daß die „Knoten“, zwischen denen soziale Beziehungen bestehen, nicht nur aus einzelnen Individuen, sondern selbst aus Gruppen bestehen können.

2.2 Soziometrische Daten

1. Soziometrische Daten können auf unterschiedliche Weisen erhoben werden; etwa durch Beobachtungen, Analyse von Dokumenten oder durch eine Befragung der beteiligten Personen. Die größte Verbreitung hat zunächst ein von Moreno vorgeschlagener *soziometrischer Test* erlangt. Moreno charakterisiert ihn folgendermaßen:[3]

„Wir können die Haupttendenz der sozialen Entwicklung eines Individuums weder durch bloße Beobachtung (z.B. der spontanen Ausdrucksformen und des Spiels des Kindes) noch durch eigene Teilnahme völlig verstehen. Wir müssen das zu erforschende Objekt selbst in einen Experimentator verwandeln, im Fall einer Gruppenformation die Mitglieder der zukünftigen Gruppe zu Gestaltern der eigenen Gruppe machen. Der soziometrische Test wird angewendet, um genaue Kenntnis der Gruppenorganisation zu erhalten. Er beruht darauf, daß ein Individuum die Teilnehmer für irgendeine Gruppe wählt, der es angehört oder

[2] Z.B. schrieb Moreno (1951, S. 7): „Sociometry means measurement of social relations, in its broadest sense, *all* measurement of *all* social relations.“

[3] Wir zitieren aus der 2. Auflage der deutschen Übersetzung seines Buches „Who shall survive?“, die 1967 erschienen ist. Die erste Auflage dieser Übersetzung erschien 1954.

angehören möchte. Da diese Wahlen von den Personen selbst bestimmt werden, wird jedes Individuum zum Teilnehmer. Auf diese Weise legt der Test die Beziehungen der einzelnen Personen zueinander frei und gibt somit ein Bild der Gesamtstruktur.“ (Moreno 1967, S. 36 f.)

Wie sich in diesen Ausführungen bereits andeutet, legte Moreno großen Wert darauf, dass die Personen, die einem soziometrischen Test unterzogen werden sollen, aktiv in dessen Durchführung einbezogen werden, und er hat auch stets gefordert, dass die Ergebnisse solcher Tests soweit möglich praktisch umgesetzt werden sollten, d.h. dass auf der Grundlage der von den Teilnehmern geäußerten Präferenzen neue Gruppenkonstellationen gebildet werden sollten.[4]

2. Morenos soziometrischer Test wurde in unterschiedlichen Formen angewendet, abhängig in erster Linie von der Art der Gruppen, die untersucht werden sollten. Ein bevorzugtes Anwendungsfeld bildeten Schulen.

„In *Schulgruppen* wurde der Test in folgender Form ausgeführt: Der Tester trat in das Klassenzimmer und wendete sich an die Schüler: ‘Ihr sitzt jetzt in der Ordnung, wie Euer Lehrer sie bestimmt hat. Euer Nachbar wurde nicht von Euch gewählt. Es wird Euch nun die Gelegenheit gegeben, das Mädchen oder den Jungen zu wählen, den ihr gerne neben Euch sitzen haben möchtet. Schreibt daher auf, wen ihr am liebsten zum Nachbarn haben wollt. Schaut Euch um, entschließt Euch und denkt daran, daß in Zukunft diejenigen Freunde, die ihr jetzt wählt, neben Euch sitzen werden.’ Es wurde eine Minute zur Überlegung der Wahl gegeben, bevor die Schüler ihre Freunde aufschrieben. Der Tester versuchte in ein Verhältnis mit den Schülern zu kommen und genau die Bedeutung der Entscheidungen auszulegen.
Unmittelbar nach der ersten Wahl wandte sich der Tester wieder an die Schüler: ‘Jeder kann jetzt eine zweite Wahl treffen; denn es mag sein, daß nicht jedem der Wunsch der ersten Wahl erfüllt werden kann.’ Die Kinder wählten der der gleichen Art wie das erste Mal. In manchen Fällen forderte der Tester die Kinder nach der zweiten Wahl noch einmal auf, andere Schüler zu wählen, bis die Wahlspontaneität der Kinder erschöpft schien.“ (Moreno 1967, S. 37)

Dies ist natürlich nur ein Beispiel. Moreno hat sich viel Mühe gegeben, je nach Art der Gruppen und Fragestellung unterschiedliche Varianten soziometrischer Tests zu entwickeln.

3. Eine der ersten größeren soziometrischen Untersuchungen wurde von Moreno gemeinsam mit Helen H. Jennings in der *New York State Training School for Girls* durchgeführt.[5] Da wir einen Teil der in diesem Zusammenhang erhobenen Daten später als Beispiel verwenden wollen, ist es

[4] In dieser Hinsicht kann man ihn als einen Vorläufer der später so genannten „Aktionsforschung“ oder „Handlungsforschung“ betrachten, wie sie z.B. von Wohlrapp (1979) diskutiert worden ist.

[5] Daraus sind auch zahlreiche soziometrische Arbeiten von Morenos Mitarbeiterin entstanden; vgl. z.B. Jennings (1937) und (1943).

nützlich, einen zumindest oberflächlichen Eindruck dieser Anstalt zu gewinnen. Moreno (1967, S. 98) gibt folgende Hinweise:

„Die Gemeinschaft, in der diese Studie ausgeführt wurde, befindet sich in der Nähe von Hudson, New York. Sie hat die Größe eines kleinen Dorfes. Die Einwohnerzahl liegt zwischen 500 und 600 Personen. Die Gemeinschaft ist geschlossen. Die Bevölkerung ist ausschließlich weiblichen Geschlechts. Die Mädchen sind noch im Entwicklungsalter und bleiben, bis ihre Erziehung beendet ist, einige Jahre in Hudson. Sie werden aus allen Teilen des Staates New York durch die Gerichte in diese Anstalt überwiesen. Sie stellen einen Querschnitt durch alle Nationalitäten und sozialen Gruppen New Yorks dar. Die Organisation hat einen doppelten Charakter: sie setzt sich aus zwei Gruppen, der Gruppe des Verwaltungspersonals und der Schülerinnengruppe, zusammen. 16 kleine Häuser dienen zur Unterbringung; außerdem sind eine Kapelle, eine Schule, ein Krankenhaus, ein Industriebetrieb, ein Warenhaus, eine Dampfwäscherei und ein landwirtschaftlicher Betrieb vorhanden. Die Hausmutter übernimmt die Funktionen der Eltern. Alle Mahlzeiten werden in jedem Haus einzeln unter der Leitung eines Küchenchefs zubereitet. Die Mädchen arbeiten in verschiedener Weise im Haushalt mit, als Aufwärterinnen, Küchengehilfinnen, Köchinnen, Kellnerinnen, Wäscherinnen und Stubenmädchen. Die farbigen Einwohner sind von den weißen Mädchen getrennt in besonderen Häusern untergebracht. Im täglichen Verkehr außerhalb der Wohnhäuser hingegen, in der Schule, auf den Arbeitsstätten, in der Kapelle usw., mischen sich Weiße und Farbige zwanglos. Diese und ähnliche Dinge können als ‘offizielle soziale Organisation’ der Gemeinschaft bezeichnet werden.“

Der letzte Satz bildet nun den Ausgangspunkt für Morenos soziometrischen Ansatz, den er in diesem Beispiel folgendermaßen erläutert:

„Außer dieser formellen Struktur gibt es eine unsichtbare soziometrische Organisation der Hausgemeinschaft, innerhalb der jeder Einzelne seine Stellung und Funktion hat. Die offizielle soziale Funktion eines Mädchens kann z.B. das Überwachen des Schlafraumes sein, während es in seiner soziometrischen Funktion als affektbetonte erste Wahl und verhätschelter Liebling der Hausmutter gilt und von den übrigen Gruppenmitgliedern abgestoßen wird und innerhalb der Gruppe isoliert ist. Diese emotionalen Verbindungen zwischen den Mädchen bilden eine neuartige soziale Gestalt, eine soziometrische Organisation. Der Gegensatz zwischen der formalen und informalen Gemeinschaftsstruktur hat dynamische Konsequenzen. Obwohl die weißen und farbigen Mädchen offiziell getrennt untergebracht sind, bestehen Anziehungen und Abstoßungen zwischen ihnen, die das soziale Gemeinschaftsleben stark beeinflussen. Diese emotionalen Strömungen, welche die weißen und farbigen Mädchen verbinden und trennen, müssen in allen Einzelheiten untersucht werden; ihre Ursachen müssen ermittelt und eingeschätzt werden. Ähnliche emotionale Strömungen bestehen auch innerhalb der verschiedenen Gruppen der weißen Bevölkerung, ungeachtet ihres Wohnplatzes oder ähnlicher Unterschiede zwischen den Hausgruppen. Solche psycho-sozialen Strömungen verlaufen nicht nur unter den Zöglingen, sondern auch zwischen Vorgesetzten und Zöglingen und unter den Vorgesetzten selbst. Sie bewegen sich von den Regierungsvertretern und dem Direktor der Gemeinschaft hinunter in den innersten Kreis der Verwaltungsleiter und von diesem weiter zu den Hausmüttern, Vormännern der Werkstätten und anderen Angestellten bis hinunter zu den Bewohnern. Sie durchfließen die ganze soziale Hierarchie.“

Man erkennt, dass Moreno eine sehr umfassende Analyse sozialer Gruppen vorschwebte, allerdings stets aus einer spezifischen psychologischen Perspektive: ihn interessierten die *affektiven* Beziehungen zwischen den Mitgliedern einer Gruppe oder Gemeinschaft und die Widersprüche zwischen diesen und den „offiziellen“ Beziehungen.

4. Wie wurden nun in diesem Fall soziometrische Tests konzipiert und angewendet? Moreno war sich im Klaren darüber, dass sich ein solcher Test stets auf ein bestimmtes „Kriterium“ bezieht; z.B. wer neben wem in einer Schulklasse oder in einem Speiseraum sitzen möchte oder wer mit wem zusammen in der Wäscherei arbeiten möchte. Infolgedessen gibt es jeweils viele Varianten soziometrischer Tests. Für unser gegenwärtiges Beispiel bemerkt Moreno:

„Das von uns zuerst angewandte Kriterium betrifft das Zusammenleben der Mädchen im selben Haus und stellt die Anziehungen und Abstoßungen fest, welche die Mädchen in bezug auf dieses Kriterium einander entgegenbringen. Die Personenzahl, aus der das Mädchen seine Hausgenossen wählen konnte, war 505. Auf Grund ähnlicher Versuche schätzten wir, daß fünf Wahlmöglichkeiten pro Mädchen genügend sein würden, um der sozialen Spontaneität Ausdruck zu geben. *Die ganze Gemeinschaft wurde dann zusammengerufen und gleichzeitig dem Test unterworfen,* wie dies im ersten Teil dieses Buches schon beschrieben wurde. Wir waren hernach in der Lage, jedes Mädchen zu klassifizieren gemäß der Wahlen, die es getroffen und erhalten hatte.“

Man kann sich vorstellen, wie auf diese Weise soziometrische Daten entstanden sind.

5. Um sich ein Bild der Daten zu machen, können die Begriffsbildungen aus Kapitel 1 dienen. Die Objektmenge besteht in diesem Fall aus den Namen von 505 Mädchen:

$$\Omega := \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$$

wobei $n = 505$ ist. Jedes Mädchen kann bis zu fünf andere Mädchen wählen, mit denen es in einer Hausgemeinschaft leben möchte. Also kann man eine relationale Variable

$$R : \Omega \times \Omega \longrightarrow \tilde{\mathcal{R}} := \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

definieren, deren Werte folgendermaßen zustande kommen:

$$R(\omega, \omega') := \begin{cases} 0 & \text{wenn } \omega' \text{ nicht von } \omega \text{ gewählt wird} \\ 1 & \text{wenn } \omega' \text{ die 1. Wahl von } \omega \text{ ist} \\ 2 & \text{wenn } \omega' \text{ die 2. Wahl von } \omega \text{ ist} \\ 3 & \text{wenn } \omega' \text{ die 3. Wahl von } \omega \text{ ist} \\ 4 & \text{wenn } \omega' \text{ die 4. Wahl von } \omega \text{ ist} \\ 5 & \text{wenn } \omega' \text{ die 5. Wahl von } \omega \text{ ist} \end{cases}$$

Auf diese Weise entsteht ein Graph $\mathcal{G} := (\Omega, R)$, dessen Knoten Namen der Mädchen und dessen Kanten gerichtet und durch Werte in $\tilde{\mathcal{R}}$ bewertet sind.

6. Leider werden die vollständigen Daten für dieses Beispiel von Moreno nicht mitgeteilt. Dabei wäre es nicht allzu schwierig gewesen. Z.B. hätte er eine Tabelle der folgenden Art verwenden können.

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
ω_1	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
ω_n	w_{n1}	w_{n2}	w_{n3}	w_{n4}	w_{n5}

wobei sich die Spalten auf Wahlmöglichkeiten beziehen, also w_{ij} die Nummer des von ω_i in der j-ten Wahl gewählten Mädchens angibt. Stattdessen findet man bei Moreno hauptsächlich drei Arten von Angaben: Illustrative Angaben für die Wahlen jeweils einzelner Mädchen, graphische Darstellungen von Teilen des gesamten Netzwerks und zusammenfassende statistische Tabellen, die z.B. angeben, wie viel Prozent der Mädchen einer bestimmten Hausgemeinschaft Mächen aus anderen Hausgemeinschaften gewählt haben.

7. Um uns dennoch auf Daten beziehen zu können, verwenden wir ein Beispiel, das in einer Arbeit von E. Forsyth und L. Katz (1946) angegeben wurde. Es handelt sich um einen Ausschnitt aus einem von Moreno erhobenen Datensatz, den die Autoren aus einer von Moreno publizierten graphischen Darstellung rekonstruiert haben.[6] Dieses Beispiel ist auch deshalb interessant, weil zum erstenmal eine Adjazenzmatrix verwendet wird, um die Daten darzustellen. Tab. 2.2.1 zeigt diese Adjazenzmatrix. Die Daten stammen aus einem soziometrischen Test bei 25 Mädchen aus dem Wohngebäude Nr. 4 der New York State Training School for Girls, die oben beschrieben wurde. Bei diesem Test konnte jedes Mädchen beliebig viele andere Mädchen nennen und angeben, ob es eine „positive“ oder „negative“ Beziehung zu dem anderen Mädchen „fühlt“. In der Adjazenzmatrix sind „positive“ Beziehungen durch eine 1, „negative“ Beziehungen

[6] Sie beziehen sich auf ein Soziogramm, das bei Moreno (1934) abgedruckt ist.

Tabelle 2.2.1 Soziomatrix für 25 Schülerinnen der New York State Training School for Girls (Forsyth und Katz 1946, S. 345).

					5					10					15					20					25
1	•	1			1						1	1			0			0							
2	1	•	1		1	1									0										
3		1	•		1												0	1							
4				•	1	1	1				1														
5					•																			0	
6		0		1	1	•	1	1							0							1	0	1	0
7				0	1	1	•	1	1				1		1		0	0	0					1	1
8				0	1	1	1	•	1	1	1				0							0			
9					1		1	1	•	1			1		1										
10								1	1	•	1								0			1			
11								1			•		1	0			1								
12											1	•	1												
13							1				1	1	•	1	0	1									
14				0							1	1	1	•											0
15				0			1		1						•							1			0
16		1			1								1		0	•									
17			1				1				1						•				1				
18																		•							
19				0	1		1			1	1								•			0	0		0
20			0															0		•	1				
21											1									1	•	1			
22	1					1				1												•	1		1
23																			0			1	•	1	
24					1	1	1				1												1	•	
25					1		1					1										1			•

durch eine 0 gekennzeichnet. Z.B. äußerte das Mädchen Nr. 6 eine „positive“ Beziehung zum Mädchen Nr. 4 und eine „negative“ Beziehung zum Mädchen Nr. 2.

8. Auch diese Daten können durch eine relationale Variable repräsentiert werden. Die Objektmenge besteht aus den 25 Mädchen:

$$\Omega := \{\omega_1, \ldots, \omega_{25}\}$$

und die relationale Variable hat die Form

$$R : \Omega \times \Omega \longrightarrow \tilde{\mathcal{R}} := \{-1, 0, 1\}$$

wobei die Bedeutung der Werte durch

$$R(\omega, \omega') := \begin{cases} -1 & \text{wenn } \omega \text{ keine Angabe über } \omega' \text{ macht} \\ 0 & \text{wenn } \omega \text{ eine „negative“ Beziehung zu } \omega' \text{ ausdrückt} \\ 1 & \text{wenn } \omega \text{ eine „positive“ Beziehung zu } \omega' \text{ ausdrückt} \end{cases}$$

2.3 Fragestellungen und Soziogramme

1. Welche Erkenntnisinteressen wurden mit der Erhebung soziometrischer Daten verbunden? Bei Moreno (1937, S. 211) findet man folgende Hinweise:

> “Within sociometric work several approaches can be distinguished: (1) the research procedure, aiming to study the organization of groups; (2) the diagnostic procedure, aiming to classify the positions of individuals in groups and the position of groups in the community; (3) therapeutic and political procedures, aiming to aid individuals or groups to better adjustment; and finally, (4) the complete sociometric procedure, in which all these steps are synthetically united and transformed into a single operation, one procedure depending upon the other.”

Es wird deutlich, dass für Moreno die empirischen Untersuchungen schließlich einer sozial-pädagogischen Aufgabe dienen sollten. In der Entwicklung der Soziometrie als Teilgebiet einer empirischen Sozialforschung ist dieses Interesse allerdings weitgehend in den Hintergrund gedrängt worden und hat sich stattdessen der Glaube verbreitet, dass man mithilfe soziometrischer und anderer psychologicher Tests Menschen und ihre Einbindung in soziale Kontexte „messbar“ und „steuerbar“ machen könne.[7]

2. Das in der Anfangszeit bevorzugte Mittel, um über den potentiellen Informationsgehalt soziometrischer Daten nachdenken zu können, waren *Soziogramme*, d.h. graphische Darstellungen der durch die Daten erfassten Beziehungen. Abb. 2.3.1 zeigt als Beispiel ein Soziogramm für die in Tabelle 2.2.1 angegebenen Daten. Es entspricht weitgehend dem Soziogramm, das ursprünglich von Moreno gezeichnet wurde und aus dem Forsyth und Katz ihre Adjazenzmatrix gewonnen haben. Diese Abbildung macht auch deutlich, dass Soziogramme bereits bei einer verhältnismäßig kleinen Anzahl von Knoten sehr unübersichtlich werden können. Sobald die Anzahl der Knoten größer wird, wird natürlich auch das Soziogramm immer unübersichtlicher. Als Beispiel sei auf eine Untersuchung von G. A. Lundberg und M. Steele aus dem Jahr 1936 hingewiesen, in der die Autoren die sozialen Beziehungen der Einwohner eines Dorfes mit etwa 1000

[7] Diese Haltung kommt z.B. in folgenden Äußerungen von L. D. Zeleny (1940, S. 102) zum Ausdruck: „When a college classroom is operated on the group discussion plan (the class often divided into groups of five students each for purpose of discussion and group projects) it is possible to measure the morale of the groups, social status and individual adjustment by means of the sociometric method. When this is accomplished it is possible to control the morale of groups by reassignment of students; this will also improve the ‘satisfyingness’ of the classroom experience and may be expected to increase learning. In addition, individual *social status scores* and *social adjustment ratios* can be used by the instructor to aid him in the guidance of the student toward the development of a more acceptable personality.“ Ein weiteres Beispiel ist M. L. Northway’s „Social Acceptability Test“ (1942) für Schulkinder. Weiterhin gab es auch Vorschläge, die Methode in vielen anderen Bereichen einzusetzen, man vgl. z.B. J. H. Jacobs’ „The Application of Sociometry to Industry“ (1945).

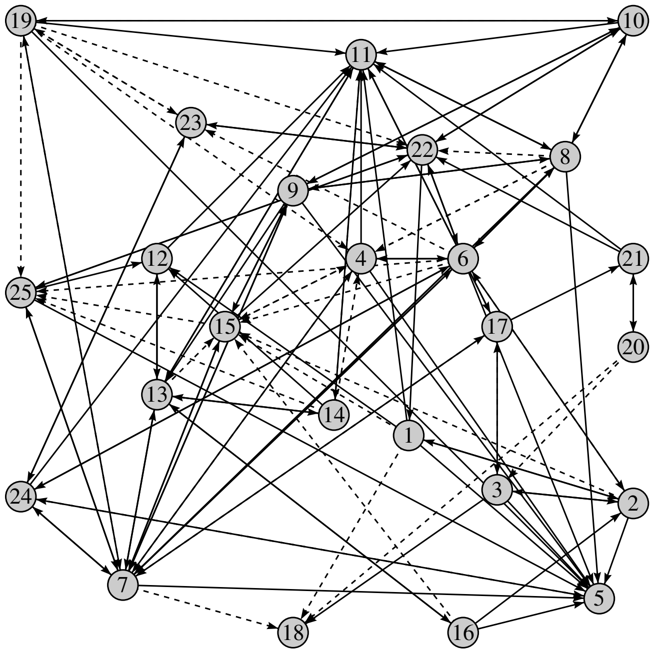


Abb. 2.3.1 Ein Soziogramm der Daten aus Tabelle 2.2.1.
Kantenwerte: 0 = gestrichelt, 1 = durchgezogen.

Einwohnern erfassen wollten. Als Teil des Projekts wurden die Freundschaftsbeziehungen zwischen 199 Personen erfasst. Zu ihrem Versuch, die erhobenen Daten durch ein Soziogramm darzustellen, schreiben die Autoren:

„The attempt to chart the population of the whole village on a single geographic map resulted in an inextricable maze which tended to obscure the significant clusterings which we wished to exhibit.“ (Lundberg und Stelle 1938, S. 379)

Seither sind zwar viele Anstrengungen unternommen worden, um die Techniken zur graphischen Darstellung zu verbessern,[8] sie helfen jedoch kaum bei der Aufgabe, den potentiellen Informationsgehalt relationaler Daten zu erfassen.

3. In dem eben angeführten Zitat wird auch bereits ein weiteres Interesse sichtbar, das in der Literatur, die sich mit sozialen Netzwerken beschäftigt, bis heute eine dominierende Stellung einnimmt: Man möchte „significant clusterings“ finden. Eine umfassende Darstellung der für diesen Zweck ausgedachten Methoden findet man bei Wasserman und Faust (1994).

[8] Über den gegenwärtigen Stand der Methoden zum Zeichnen von Graphen informieren Di Battista, Eades, Tamassia und Tollis (1999).

Kapitel 3

Methoden der Darstellung und Analyse

In diesem Kapital werden elementare Methoden der Darstellung und Analyse von Graphen besprochen. Wir beginnen mit einigen Hinweisen zum praktischen Arbeiten mit Graphen. Als Beispiel dienen in erster Linie die im vorangegangenen Kapitel in Tabelle 2.2.1 angegebenen Daten.

3.1 Hinweise zum praktischen Rechnen

1. Wenn ein Graph nicht nur aus sehr wenigen Knoten besteht, ist es meistens erforderlich, Rechnungen mithilfe eines Computers durchzuführen. Man muss sich also überlegen, wie man relationale Daten in einem Datenfile so speichert, dass sie von einem Computerprogramm gelesen werden können. Dafür gibt es hauptsächlich zwei Möglichkeiten. Die erste Möglichkeit besteht darin, das Datenfile in Gestalt einer Adjazenzmatrix zu bilden. In unserem Beispiel müsste man also ein Datenfile mit 25 Zeilen und 25 Spalten erzeugen, dessen Einträge den in Tabelle 2.2.1 angegebenen Werten entsprechen. Dabei kann für die nichtbesetzten Zellen irgendein Wert verwendet werden, der im Merkmalsraum der relationalen Variablen nicht vorkommt.[1]

2. Ein Nachteil dieser Methode besteht darin, dass bei einem Graphen mit n Knoten unabhängig von der Anzahl der tatsächlich vorhandenen Kanten stets n^2 Werte im Datenfile aufgeführt werden müssen. Insbesondere bei schwach besetzten Adjazenzmatrizen bzw. bei Graphen mit einer geringen Dichte ist es deshalb vorteilhafter, die Daten in Form einer *Kantenliste* zu speichern. Das Datenfile enthält dann für jede Kante des Graphen eine Zeile mit drei Einträgen: der Nummer des Anfangsknotens, der Nummer des Endknotens und dem Wert der Kante, die den Anfangs- mit dem Endknoten verbindet. Zur Illustration zeigt Tabelle 3.1.1 die Daten aus Tabelle 2.2..1 in Form einer Kantenliste. Es gibt insgesamt 123 Zeilen. Die erste Spalte (i) gibt die Nummer des Anfangsknotens an, die zweite Spalte (j) die Nummer des Endknotens und die dritte Spalte (r_{ij}) den Wert der Kante, in unserem Beispiel eine 0 oder eine 1. Offenbar ist es nur erforderlich, anstelle der insgesamt 625 möglichen Kanten diejenigen in der Kantenliste

[1] Wir verwenden in diesem Text für nichtbesetzte Zellen die Zahl -1, da das Computerprogramm TDA von der Konvention ausgeht, dass alle nicht-negativen Zahlen zulässige Kantenbewertungen sind.

Tabelle 3.1.1 Daten aus Abb. 2.2.1 in Form einer Kantenliste.

i	j	r_{ij}	i	j	r_{ij}	i	j	r_{ij}	i	j	r_{ij}
1	2	1	7	5	1	11	8	1	19	5	1
1	5	1	7	6	1	11	13	1	19	7	1
1	11	1	7	8	1	11	14	0	19	10	1
1	12	1	7	9	1	11	17	1	19	11	1
1	15	0	7	13	1	12	11	1	19	22	0
1	18	0	7	15	1	12	13	1	19	23	0
2	1	1	7	17	0	13	7	1	19	25	0
2	3	1	7	18	0	13	11	1	20	3	0
2	5	1	7	19	0	13	12	1	20	18	0
2	6	1	7	24	1	13	14	1	20	21	1
2	15	0	7	25	1	13	15	0	21	11	1
3	2	1	8	4	0	13	16	1	21	20	1
3	5	1	8	5	1	14	4	0	21	22	1
3	17	0	8	6	1	14	11	1	22	1	1
3	18	1	8	7	1	14	12	1	22	6	1
4	5	1	8	9	1	14	13	1	22	10	1
4	6	1	8	10	1	14	25	0	22	23	1
4	7	1	8	11	1	15	4	0	22	25	1
4	11	1	8	15	0	15	7	1	23	19	0
5	24	0	8	22	0	15	9	1	23	22	1
6	2	0	9	5	1	15	22	1	23	24	1
6	4	1	9	7	1	15	25	0	24	5	1
6	5	1	9	8	1	16	2	1	24	6	1
6	7	1	9	10	1	16	5	1	24	7	1
6	8	1	9	13	1	16	13	1	24	11	1
6	15	0	9	15	1	16	15	0	24	23	1
6	22	1	10	8	1	17	3	1	25	5	1
6	23	0	10	9	1	17	7	1	25	7	1
6	24	1	10	11	1	17	11	1	25	12	1
6	25	0	10	19	0	17	21	1	25	22	1
7	4	0	10	22	1	19	4	0			

anzuführen, die tatsächlich existieren, d.h. eine nicht-negative Kantenbewertung haben. In unserem Beispiel sind dies 123 Kanten.[2]

3. Hat man die Daten in einem Datenfile gespeichert, entweder in Gestalt einer Adjazenzmatrix oder in Gestalt einer Kantenliste, stellt sich natürlich die Frage nach einem geeigneten Computerprogramm, das solche Datenfiles nicht nur lesen kann, sondern auch in der Lage ist, mit relationalen Daten zu rechnen. Da die meisten Statistik-Programme dazu nicht in der Lage sind, wurden im Laufe der Zeit zahlreiche spezielle Programme entwickelt, um relationale Daten zu analysieren.[3] Wir verwenden in diesem Text das

[2] Das Verhältnis der tatsächlich vorhandenen zu den insgesamt möglichen Kanten wird manchmal als *Dichte eines Graphen* bezeichnet. In unserem Beispiel ist die Dichte 123/625, etwa 20 %.

[3] Eine Übersicht über eine Reihe verbreiteter Programme findet man bei Scott (1991, S. 176 ff.) und bei Wasserman und Faust (1994, S. 735 ff.).

Box 3.1.1 Skript zur Erzeugung eines Graphen.

```
nvar(                       # Befehl zum Erzeugen von Variablen
  dfile = sm1.dat,          # Name des Datenfiles
  I = c1,                   # Variable I wird aus Spalte 1 gebildet
  J = c2,                   # Variable J wird aus Spalte 2 gebildet
  V = c3,                   # Variable V wird aus Spalte 3 gebildet
);
gdd(                        # Befehl zum Erzeugen eines Graphen
  opt = 1,                  # Option 1: Kantenliste
  gt  = 4,                  # Graphtyp 4: gerichtet und bewertet
) = I,J,V;                  # Variablen fuer die Kantenliste
```

Programm TDA, das in der Lage ist, sowohl mit statistischen als auch mit relationalen Daten zu rechnen.

4. Um die praktische Vorgehensweise zu illustrieren, verwenden wir die in Tabelle 3.1.1 angegebenen Daten in Form einer Kantenliste. In einem ersten Schritt wird ein Datenfile erzeugt, wir haben es `sm1.dat` genannt, das die Daten enthält. Es hat 123 Zeilen und 3 Spalten. Dann wird das in Box 3.1.1 angegebene TDA-Skript verwendet, um die Daten zu lesen und aus ihnen einen gerichteten und bewerteten Graphen zu bilden. Es sei angemerkt, dass in diesem Text nicht erklärt wird, wie das Programm TDA funktioniert, denn das kann man nur durch eigene praktische Arbeit und eine Lektüre des Handbuchs lernen. Die an einigen Stellen angeführten TDA-Skripte sind vielmehr als Hinweise gemeint, die dazu anregen sollen, selbst praktische Rechnungen mit relationalen Daten durchzuführen.

3.2 Beschreibung von Graphen

1. Hat man einen Graphen definiert, stellt sich die Frage, wie man ihn beschreiben und analysieren kann. Für die Analyse von Graphen sind im Laufe der Zeit sehr viele Rechenverfahren ausgedacht worden. Natürlich hängt es von der jeweiligen inhaltlichen Bedeutung der Beziehungen ab, welche dieser Verfahren sinnvoll anwendbar sind. Eine breit angelegte Übersicht über Methoden, die zur Analyse sozialer Netzwerke entwickelt worden sind, findet man bei Wasserman und Faust (1994). Das kann und soll hier nicht wiederholt werden. In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Frage, wie man einige Basisinformationen über einen Graphen gewinnen kann, im nächsten Abschnitt wird besprochen, wie man Komponenten und Cliquen berechnen kann. Auf weitere Methoden werden wir erst in späteren Kapiteln genauer eingehen, wenn ihre Anwendung aus einem inhaltlichen Kontext begründet werden kann.

2. Zur Beschreibung eines Graphen gehören mindestens folgende Angaben:

a) Eine Angabe über die Anzahl der Knoten des Graphen;

Tabelle 3.2.1 Eingangs- (e_i) und Ausgangsgrad (a_i) der Knoten in `sm1.dat`.

i	e_i	a_i	i	e_i	a_i	i	e_i	a_i	i	e_i	a_i	i	e_i	a_i
1	2	6	6	6	10	11	11	4	16	1	4	21	2	3
2	4	5	7	10	12	12	4	2	17	3	4	22	8	5
3	3	4	8	5	9	13	6	6	18	4	0	23	4	3
4	6	4	9	4	6	14	2	5	19	3	8	24	4	5
5	12	1	10	4	5	15	8	5	20	1	3	25	6	4

b) eine Angabe über die Anzahl der Kanten des Graphen, wobei auch anzugeben ist, ob und ggf. wie viele Schlingen es gibt; und

c) eine Charakterisierung des Typs des Graphen, wobei zwischen gerichteten und ungerichteten und bewerteten und unbewerteten Graphen zu unterscheiden ist.

In unserem Beispiel handelt es sich offenbar um einen gerichteten und bewerteten Graphen mit 25 Knoten und 123 Kanten. Eine Betrachtung der Kantenliste zeigt außerdem, dass es keine Schlingen gibt.

3. Weiterhin aufschlußreich sind Angaben über den Grad der Knoten in einem Graphen. Wie in Abschnitt 1.2.2 besprochen wurde, müssen bei gerichteten Graphen Eingangs- und Ausgangsgrad unterschieden werden. Zur Berechnung stellt TDA den Befehl

```
gni = Name_eines_Files;
```

zur Verfügung. Fügt man diesen Befehl an das in Box 3.1.1 angegebene Skript an, erhält man ein File, das für jeden Knoten des Graphen seinen Eingangs- und Ausgangsgrad angibt. Tabelle 3.2.1 zeigt das Ergebnis. Man erkennt insbesondere, dass es keine isolierten Knoten gibt. Nur bei der Person Nr. 18 ist der Ausgangsgrad 0, d.h. dieses Mädchen hat zu keinem anderen eine „positive“ oder „negative“ Beziehung geäußert. Der Eingangsgrad zeigt aber, dass es selbst viermal von anderen Mädchen genannt wurde. An dieser Stelle zeigt sich auch sogleich ein Mangel der bisherigen Berechnung, da sie nicht zwischen „positiven“ und „negativen“ Beziehungen unterscheidet. Dieses Problem stellt sich generell bei bewerteten Graphen. Die Berechnung von Graden berücksichtigt nur, ob eine Kante vorhanden ist oder nicht, nimmt aber keinen Bezug auf die unterschiedlichen Kantenbewertungen.

4. Wenn, wie in unserem Beispiel, der Merkmalsraum einer relationalen Variablen nur aus wenigen unterschiedlichen Kantenbewertungen besteht, liegt es nahe, für jede Merkmalsausprägung einen separaten Graphen zu definieren. In unserem Beispiel kann man zwei Graphen bilden: Einen Graphen, der die „positiven“ Beziehungen erfasst, und einen Graphen, der die „negativen“ Beziehungen erfasst. Dann kann man alle Rechnungen jeweils gesondert für die beiden Graphen durchführen.[4] Da die Knotenmenge in beiden Graphen gleich ist, kann man auch einen sogenannten *Multigraphen* definieren, der für eine bestimmte Knotenmenge zwei (oder mehr) unterschiedliche Beziehungen erfasst. Das in Box 3.2.1 angegebene Skript zeigt, wie ein solcher Multigraph erzeugt werden kann. Es werden mit der gleichen Knotenmenge zwei Kantenlisten gebildet. In der ersten Kantenliste werden diejenigen Kanten erfasst, für deren Bewertung im Datenfile (`sm1.dat`) eine 1 steht, in der zweiten Kantenliste werden die Kanten erfasst, bei denen eine 0 steht. Die Definition des Graphen erfolgt wieder mit dem `gdd`-Befehl. Die ersten beiden Variablen geben die Nummern der Knoten an, dann folgt für jede Kantenliste eine weitere Variable mit der Bewertung.

Box 3.2.1 Skript zur Erzeugung eines Multigraphen.

```
nvar(                         # Befehl zum Erzeugen von Variablen
  dfile = sm1.dat,            # Name des Datenfiles
  I = c1,                     # Variable I wird aus Spalte 1 gebildet
  J = c2,                     # Variable J wird aus Spalte 2 gebildet
  V1 = if eq(c3,1) then 1 else -1,  # V1 ist 1 wenn c3 = 1 ist
  V2 = if eq(c3,0) then 1 else -1,  # V2 ist 1 wenn c3 = 0 ist
);
gdd(                          # Befehl zum Erzeugen eines Graphen
  opt = 1,                    # Option 1: Kantenliste
  gt  = 4,                    # Graphtyp 4: gerichtet und bewertet
) = I,J,V1,V2;                # Variablen fuer zwei Kantenlisten
gni = deg1.dat;               # Befehl zur Gradberechnung
```

5. Als Ergebnis erhält man die Information, dass der erste Graph 92, der zweite Graph 31 Kanten enthält. Es gibt also deutlich mehr „positive“ als „negative“ Beziehungen. Der am Ende des Skripts angeführte `gni`-Befehl liefert nun gesondert für jeden der beiden Graphen die Eingangs- und Ausgangsgrade. Tabelle 3.2.2 zeigt das Ergebnis.

6. Die Berechnung der Eingangs- und Ausgangsgrade liefert eine Information über jeden Knoten eines Graphen. Ähnliches gilt für viele andere Methoden, mit denen Graphen analysiert werden können. Als Ergebnis erhält man stets eine Tabelle, die für jeden Knoten des Graphen eine Zeile enthält. Solche Tabellen wachsen also linear mit der Anzahl der Knoten des Graphen und können – wie Soziogramme – schnell unübersichtlich werden. Um sich bei großen Graphen Übersichten zu verschaffen, ist es deshalb erforderlich, statistische Methoden zu verwenden. Die Grundidee besteht darin, Häufigkeitsverteilungen zu berechnen und tabellarisch oder

[4] In unserem Beispiel könnte man zunächst diejenigen Kanten auswählen, die die Bewertung 1 haben, dann die Kanten, deren Bewertung 0 ist. Zur Selektion könnten die TDA-Befehle `tsel = V[1]` bzw. `tsel = V[0]` verwendet werden.

Tabelle 3.2.2 Eingangs- (e_i) und Ausgangsgrad (a_i) der Knoten in dem aus `sm1.dat` gebildeten Multigraphen.

Graph 1: „positive" Beziehungen

i	e_i	a_i	i	e_i	a_i	i	e_i	a_i	i	e_i	a_i	i	e_i	a_i
1	2	4	6	6	6	11	11	3	16	1	3	21	2	3
2	3	4	7	10	8	12	4	2	17	1	4	22	6	5
3	2	3	8	5	6	13	6	5	18	1	0	23	2	2
4	1	4	9	4	6	14	1	3	19	0	4	24	3	5
5	12	0	10	4	4	15	2	3	20	1	1	25	2	4

Graph 2: „negative" Beziehungen

i	e_i	a_i	i	e_i	a_i	i	e_i	a_i	i	e_i	a_i	i	e_i	a_i
1	0	2	6	0	4	11	0	1	16	0	1	21	0	0
2	1	1	7	0	4	12	0	0	17	2	0	22	2	0
3	1	1	8	0	3	13	0	1	18	3	0	23	2	1
4	5	0	9	0	0	14	1	2	19	3	4	24	1	0
5	0	1	10	0	1	15	6	2	20	0	2	25	4	0

graphisch darzustellen. Z.B. kann man Tabellen berechnen, die zeigen, mit welchen Häufigkeiten die unterschiedlichen Eingangs- und Ausgangsgrade bei den Knoten eines Graphen auftreten. Grundsätzlich ist es sinnvoll, solche Berechnungen immer dann anzustellen, wenn eine Rechenmethode Informationen über alle Knoten eines Graphen liefert und die Anzahl der Knoten groß ist.[5] In unserem Beispiel kann eine Interpretation allerdings schon bei der Tabelle 3.2.2 ansetzen.

3.3 Komponenten und Cliquen

1. Weiterhin gehört zur Beschreibung eines Graphen eine Angabe, ob der Graph in Komponenten zerfällt und aus wie vielen Komponenten er besteht. Zur Definition von Komponenten beziehen wir uns zunächst auf einen ungerichteten Graphen mit der Knotenmenge $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Dann ist mit dem Begriff *Weg* eine Folge von Knoten $i_0, \ldots, i_m$ gemeint, so dass es zwischen je zwei aufeinander folgenden Knoten eine Kante gibt.[6] Man sagt auch, dass ein solcher Weg vom Knoten i_0 zum Knoten i_m führt; die

[5] Um derartige statistische Berechnungen zu erleichtern, erzeugen die meisten TDA-Befehle zur Analyse von Graphen Ausgabefiles, die unmittelbar zur Erzeugung einer normalen Datenmatrix verwendet werden können, an die sich statistische Auswertungen anschließen können.

[6] Bei dieser allgemeinen Definition ist also zugelassen, dass dieselbe Kante innerhalb eines Wegs mehrfach auftreten kann. Wenn dies ausgeschlossen werden soll, sprechen wir von Wegen ohne Kantenwiederholungen.

Anzahl der Kanten, also m, wird *Länge des Weges* genannt. Im allgemeinen kann es zwischen jeweils zwei Knoten eines ungerichteten Graphen einen, mehrere oder auch keinen Weg geben. Darauf bezieht sich der Begriff einer Komponente: Eine *Komponente eines ungerichteten Graphen* ist ein maximaler Subgraph, bei dem für jeweils zwei Knoten gilt, dass sie durch mindestens einen Weg miteinander verbunden sind (oder anders formuliert: jeder Knoten ist von jedem anderen Knoten aus erreichbar). Ein ungerichteter Graph, der nur aus einer einzigen Komponente besteht, wird *zusammenhängend* genannt. Als Beispiel kann man an den in Abschnitt 1.2.1 (S. 15) angegebenen Graphen danken, der aus 5 Knoten und 2 Kanten besteht. Dieser Graph ist nicht zusammenhängend, sondern zerfällt in 3 Komponenten.

2. Diese Definition gilt nur für ungerichtete Graphen. Bei gerichteten Graphen, wie in unserem Beispiel, kann man zunächst in zwei unterschiedlichen Weisen von Wegen sprechen:

a) Eine Folge von Knoten $i_0, \ldots, i_m$ wird ein *(gerichteter) Weg* von i_0 nach i_m genannt, wenn jeweils zwei aufeinander folgende Knoten i_k und i_{k+1} durch eine gerichtete Kante von i_k nach i_{k+1} verbunden sind.

b) Eine Folge von Knoten $i_0, \ldots, i_m$ wird ein *Semi-Weg* von i_0 nach i_m genannt, wenn jeweils zwei aufeinander folgende Knoten i_k und i_{k+1} durch eine Kante verbunden sind, die von i_k nach i_{k+1} *oder* von i_{k+1} nach i_k führt.

Dementsprechend unterscheidet man bei gerichteten Graphen zwischen zwei Arten von Komponenten: Eine *Komponente* ist ein maximaler Subgraph, bei dem jeweils zwei Knoten durch mindestens einen Weg verbunden sind (oder anders formuliert: jeder Knoten ist von jedem anderen Knoten aus durch einen gerichteten Weg erreichbar); dagegen spricht man von einer *Semi-Komponente*, wenn nur gefordert wird, dass jeweils zwei Knoten durch mindestens einen Semi-Weg verbunden sind. Ein gerichteter Graph, der nur aus einer einzigen Komponente besteht, wird *zusammenhängend* oder auch *unzerlegbar* genannt.

3. Anhand von Abb. 2.3.1 erkennt man bereits, dass in unserem Beispiel der Graph nur aus einer Semi-Komponente besteht, allerdings nur dann, wenn man nicht zwischen „positiven" und „negativen" Beziehungen unterscheidet. Unterscheidet man zwischen den beiden Arten von Beziehungen, findet man, dass nur der erste Graph zusammenhängend ist, der zweite dagegen aus 5 unterschiedlichen Komponenten besteht. Die praktischen Berechnungen können mit dem `gcon`-Befehl durchgeführt werden. Box 3.3.1 zeigt das Skript. Im Unterschied zur Vorgehensweise in Box 3.2.1 wird jetzt ein ungerichteter Multigraph definiert. Dann kann für jeden der beiden Graphen, aus denen der Multigraph besteht, mit dem `gcon`-Befehl ein Ausgabefile erzeugt werden, aus dem man ersehen kann, ob und ggf. wie

Box 3.3.1 Skript zur Berechnung von Semi-Komponenten.

```
nvar(                      # Befehl zum Erzeugen von Variablen
  dfile = sm1.dat,         # Name des Datenfiles
  I = c1,                  # Variable I wird aus Spalte 1 gebildet
  J = c2,                  # Variable J wird aus Spalte 2 gebildet
  V1 = if eq(c3,1) then 1 else -1,  # V1 ist 1 wenn c3 = 1 ist
  V2 = if eq(c3,0) then 1 else -1,  # V2 ist 1 wenn c3 = 0 ist
);
gdd(                       # Befehl zum Erzeugen eines Graphen
  opt = 1,                 # Option 1: Kantenliste
  gt  = 2,                 # Graphtyp 2: ungerichtet und bewertet
) = I,J,V1,V2;             # Variablen fuer zwei Kantenlisten
gcon(                      # Berechnung fuer den ersten Graphen
  gn = 1,                  # Angabe der Nummer des Graphen
) = gcon1.dat;             # Angabe eines Ausgabefiles
gcon(                      # Berechnung fuer den zweiten Graphen
  gn = 2,                  # Angabe der Nummer des Graphen
) = gcon2.dat;             # Angabe eines Ausgabefiles

   gcon1.dat                gcon2.dat
----------------         ----------------
1   25    1    1         1   20    1    1
1   25    2    2         1   20    2    2
1   25    3    3         1   20    3    3
1   25    4    4         1   20    4    4
1   25    5    5         1   20    6    6
1   25    6    6         1   20    7    7
1   25    7    7         1   20    8    8
1   25    8    8         1   20   10   10
1   25    9    9         1   20   11   11
1   25   10   10         1   20   13   13
1   25   11   11         1   20   14   14
1   25   12   12         1   20   15   15
1   25   13   13         1   20   16   16
1   25   14   14         1   20   17   17
1   25   15   15         1   20   18   18
1   25   16   16         1   20   19   19
1   25   17   17         1   20   20   20
1   25   18   18         1   20   22   22
1   25   19   19         1   20   23   23
1   25   20   20         1   20   25   25
1   25   21   21         2    2    5    5
1   25   22   22         2    2   24   24
1   25   23   23         3    1    9    9
1   25   24   24         4    1   12   12
1   25   25   25         5    1   21   21
```

der Graph in Komponenten zerfällt. Diese Files sind ebenfalls in der Box angegeben. In der ersten Spalte befindet sich die Nummer der Komponente. Dann folgt die Anzahl der Knoten, aus denen die Komponente besteht.

Box 3.3.2 Skript zur Berechnung von Komponenten.

```
nvar(                      # Befehl zum Erzeugen von Variablen
  dfile = sm1.dat,         # Name des Datenfiles
  I = c1,                  # Variable I wird aus Spalte 1 gebildet
  J = c2,                  # Variable J wird aus Spalte 2 gebildet
  V1 = if eq(c3,1) then 1 else -1,  # V1 ist 1 wenn c3 = 1 ist
  V2 = if eq(c3,0) then 1 else -1,  # V2 ist 1 wenn c3 = 0 ist
);
gdd(                       # Befehl zum Erzeugen eines Graphen
  opt = 1,                 # Option 1: Kantenliste
  gt  = 4,                 # Graphtyp 4: gerichtet und bewertet
) = I,J,V1,V2;             # Variablen fuer zwei Kantenlisten
gdcon(                     # Berechnung fuer den ersten Graphen
  gn = 1,                  # Angabe der Nummer des Graphen
  opt = 3,                 # Ausgabe als Knotenliste
) = gdcon1.dat;            # Angabe eines Ausgabefiles
gdcon(                     # Berechnung fuer den zweiten Graphen
  gn = 2,                  # Angabe der Nummer des Graphen
  opt = 3,                 # Ausgabe als Knotenliste
) = gdcon2.dat;            # Angabe eines Ausgabefiles

   gdcon1.dat           gdcon2.dat
 -------------        ------------
  1    1    1          1    1    1
  1    2    2          2    2    2
  1    3    3          3    3    3
  1    4    4          4    4    4
  2    5    5          5    5    5
  1    6    6          6    6    6
  1    7    7          7    7    7
  1    8    8          8    8    8
  1    9    9          9    9    9
  1   10   10         10   10   10
  1   11   11         11   11   11
  1   12   12         12   12   12
  1   13   13         13   13   13
  1   14   14         14   14   14
  1   15   15         15   15   15
  1   16   16         16   16   16
  1   17   17         17   17   17
  3   18   18         18   18   18
  4   19   19         19   19   19
  1   20   20         20   20   20
  1   21   21         21   21   21
  1   22   22         22   22   22
  1   23   23         19   23   23
  1   24   24         23   24   24
  1   25   25         24   25   25
```

In der dritten und vierten Spalte stehen die Knotennummern.[7] Aus dem

[7] In den meisten Ausgabefiles gibt es für Knotennummern zwei Spalten, da TDA zwischen internen und externen Knotennummern unterscheidet. Externe Knotennummern sind diejenigen, die in einem Datenfile verwendet werden, um eine Kantenliste zu definieren. Sie brauchen weder mit 1 zu beginnen noch müssen sie fortlaufend sein. Interne

zweiten Ausgabefile (`gcon2.dat`) erkennt man, dass der zweite Graph in 5 Komponenten zerfällt. 20 der insgesamt 25 Knoten gehören zur ersten Komponente, die Knoten 5 und 24 bilden die zweite Komponente, und die restlichen drei Komponenten bestehen aus jeweils einem Knoten.

4. Für die Berechnung von Komponenten gerichteter Graphen stellt TDA den `gdcon`-Befehl zur Verfügung. Box 3.3.2 zeigt das Skript, das wir zur Berechnung verwendet haben. Wiederum enthält die Box auch die beiden Ausgabefiles; die erste Spalte gibt die Nummer der Komponente an, dann folgenden die interne und externe Knotennummer. Man erkennt, dass es im ersten Graphen 4 Komponenten gibt, wobei jedoch drei Komponenten nur aus jeweils einem Knoten bestehen: 5, 18 und 19.[8] Alle übrigen Knoten gehören einer gemeinsamen Komponente an, d.h. alle Mädchen, die zu dieser Komponente gehören, sind durch mindestens einen „positiven" Weg miteinander verbunden. Der zweite Graph zerfällt in 24 unterschiedliche Komponenten. Nur zwei Mädchen (19 und 23) gehören zu einer gemeinsamen Komponente. Wie Tabelle 3.1.1 zeigt, haben diese beiden Mädchen eine wechselseitige „negative" Beziehung.

5. Wie bereits am Ende von Abschnitt 2.3 angedeutet wurde, wird bei der Analyse sozialer Netzwerke oft die Absicht verfolgt, die Knoten eines Graphen in irgendeiner Weise in „zusammengehörige Teilgruppen" („significant clusterings") einzuteilen. Da dieser Absicht meistens keine bestimmte Idee zugrunde liegt, kann sie auf fast beliebig viele unterschiedliche Weisen verfolgt werden, und dementsprechend vielfältig sind die in der Literatur vorgeschlagenen Methoden. Wir beschränken uns hier zur Ergänzung der Betrachtung von Komponenten auf den Begriff einer *Clique*. Bei einem ungerichteten Graphen ist damit ein maximaler Teilgraph gemeint, in dem jeweils zwei Knoten direkt durch eine Kante miteinander verbunden sind.[9] Bei gerichteten Graphen kann man wiederum zwei Varianten unterscheiden: In einer (echten) Clique sind jeweils zwei Knoten in beiden Richtungen durch eine gerichtete Kante verbunden; in Semi-Cliquen sind jeweils zwei Knoten durch mindestens eine gerichtete Kante verbunden.

6. Zur Illustration berechnen wir die Semi-Cliquen im ersten Graphen, der die „positiven" Beziehungen erfasst. Box 3.3.3 zeigt das Skript, das zur Berechnung verwendet wurde. Nach dem Einlesen der Daten werden diejenigen Kanten ausgewählt, bei denen die Kantenbewertung 1 ist, und

Knotennummern entstehen durch eine Abbildung der externen Knotennummern auf die natürlichen Zahlen $1, \ldots, n$, wobei n die Anzahl der Knoten des Graphen ist. Wenn man, wie in unserem Beispiel, bereits zur Definition der Kantenliste bei 1 beginnende fortlaufende Nummern wählt, sind interne und externe Knotennummern natürlich identisch.

[8] Es sind dies diejenigen Knoten, bei denen der Eingangs- oder der Ausgangsgrad Null ist. Solche Knoten bilden in einem gerichteten Graphen immer isolierte Komponenten.

[9] Oft wird zusätzlich gefordert, dass eine Clique mindestens drei Mitglieder hat.

Box 3.3.3 Skript zur Berechnung von Semi-Cliquen.

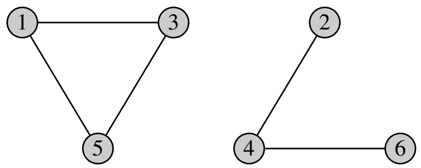
```
nvar(                    # Befehl zum Erzeugen von Variablen
  dfile = sm1.dat,       # Name des Datenfiles
  I = c1,                # Variable I wird aus Spalte 1 gebildet
  J = c2,                # Variable J wird aus Spalte 2 gebildet
  V = c3,                # Variable V wird aus Spalte 3 gebildet
);
tsel = V[1];             # Auswahl der Kanten mit dem Wert 1
gdd(                     # Definition eines ungericheten
  opt = 1,               # bewerteten Graphen
  gt  = 2,
) = I,J,V;
gcliq(                   # Berechnung von Cliquen
  min = 3,               # Mindestgroesse
  sort,                  # Sortieren der Knotennummern
) = cliq.dat;            # Ausgabefile

K    C    N    Mitgliedsnummern
------------------------------
1    1    4    4    5    6    7
1    2    4    5    6    7    8
1    3    4    5    6    7   24
1    4    4    5    7    8    9
1    5    3    5    7   25
1    6    3    5    7   19
1    7    3    2    3    5
1    8    3    1    2    5
1    9    3    2    5    6
1   10    3    2    5   16
1   11    3    8    9   10
1   12    3    8   10   11
1   13    3   10   11   19
1   14    4   11   12   13   14
1   15    3    1   11   12
1   16    3   11   17   21
1   17    3    7    9   13
1   18    3    7    9   15
```

diese Kanten werden dann verwendet, um einen ungerichteten Graphen zu definieren. Schließlich werden mit dem `gcliq`-Befehl die Semi-Cliquen berechnet und das Ergebnis in das Ausgabefile `cliq.dat` geschrieben. Im unteren Teil der Box sieht man den Inhalt dieses Files. Jede Zeile bezieht sich auf eine Semi-Clique. In Spalte 1 findet man die Nummer der Komponente, zu der die Semi-Clique gehört (wie bereits besprochen wurde, besteht der Graph 1 nur aus einer Komponente, die mehr als einen Knoten umfasst). Dann folgt in Spalte 2 die laufende Nummer der Semi-Clique und in Spalte 3 die Anzahl ihrer Mitglieder. Schließlich werden in den restlichen Spalten die Knotennummern der Cliquenmitglieder angegeben. Man erkennt also, dass es in diesem Graph 18 Semi-Cliquen gibt; 4 von ihnen haben vier, die übrigen jeweils drei Mitglieder. Man erkennt auch, dass sich

Semi-Cliquen (und im allgemeinen auch Cliquen) überschneiden können. Z.B. gehört der Knoten Nr. 5 zu 9 unterschiedlichen Semi-Cliquen.

3.4 Permutationen der Adjazenzmatrix

1. Da die Zerlegbarkeit von Graphen in Komponenten bei vielen Anwendungen eine wichtige Rolle spielt, erfolgen in diesem Abschnitt einige ergänzende Bemerkungen. Wir beginnen mit ungerichteten Graphen. Als Beispiel wird folgender Graph mit 6 Knoten betrachtet:



Dieser Graph zerfällt offensichtlich in zwei Komponenten. Anhand der graphischen Darstellung erkennt man auch sofort, dass die Komponenten eine Partition der Knotenmenge bilden: Jeder Knoten gehört zu genau einer Komponente, und zwischen jeweils zwei Komponenten gibt es keine Verbindung. Jetzt betrachten wir die zugehörige Adjazenzmatrix, die folgendermaßen aussieht:[10]

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Anhand dieser Matrix ist es jedoch nicht mehr offensichtlich, dass der Graph in zwei Komponenten zerfällt. Es ist deshalb oft zweckmäßig, die Knoten eines Graphen neu zu nummerieren, so dass diejenigen Knoten, die zu einer Komponente gehören, zusammenhängende Knotennummern haben. In unserem Beispiel liegt es nahe, auf folgende Weise neue Knotennummern zu bilden:

vorher	1	2	3	4	5	6
hinterher	1	4	2	5	3	6

[10] Um zwischen den beiden Komponenten besser unterscheiden zu können, werden die Kanten der ersten Komponente durch eine 1, die der zweiten Komponente durch eine 2 repräsentiert.

Bildet man jetzt die Adjazenzmatrix mit den neuen Knotennummern, sieht sie folgendermaßen aus:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Jetzt erkennt man auch in der Adjazenzmatrix deutlich die beiden Komponenten.[11]

2. Eine Matrix, die außerhalb ihrer Hauptdiagonalen nur Nullen enthält, wird *Diagonalmatrix* genannt. Wenn sie entlang der Hauptdiagonalen aus quadratischen Blöcken besteht, so dass außerhalb der Blöcke nur Nullen stehen, spricht man von einer *Blockdiagonalmatrix*. Offenbar ist **B** eine Blockdiagonalmatrix, die aus zwei Blöcken besteht. Allgemein sieht eine Blockdiagonalmatrix mit m Blöcken folgendermaßen aus:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{B}_m \end{bmatrix}$$

Dabei sind $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m$ quadratische Matrizen, die im allgemeinen aus unterschiedlich vielen Zeilen und Spalten bestehen können. Jede dieser quadratischen Matrizen wird auch als ein *Block* bezeichnet. Offensichtlich lassen sich Blöcke wiederum als Adjazenzmatrizen interpretieren, nämlich als Adjazenzmatrizen der Komponenten, aus denen der Gesamtgraph besteht.

3. Somit entsteht die Frage, wie man für eine beliebig vorgegebene Matrix eine Darstellung in Form einer blockdiagonalen Matrix finden kann. Dabei stellen sich zwei Probleme. Erstens muss man ermitteln, aus wie vielen Komponenten der Graph bzw. aus wie vielen Blöcken die Adjazenzmatrix besteht. Zweitens muss man eine geeignete Umnummerierung der Knotennummern des Graphen bzw. der Indizes der Adjazenzmatrix finden, so dass zusammenhängende Blöcke entstehen. Da dies bei größeren Graphen bzw. Matrizen sehr mühselig ist, stellt TDA zur Berechnung den `mpbu`-Befehl zur Verfügung, der für eine vorgegebene quadratische Matrix eine simultane Permutation der Zeilen und Spalten findet, so dass eine blockdiagonale Matrix entsteht. Das Skript in Box 3.4.1 illustriert die Verwendung dieses Befehls für das eingangs angeführte Beispiel. Zuerst wird mit dem `mdef`-Befehl die Matrix definiert. Dann wird der `mpbu`-Befehl verwendet, um

[11] Es sei angemerkt, dass man innerhalb jeder Komponente beliebige Umnummerierungen der Knotennummern vornehmen kann.

Box 3.4.1 Skript zur Bildung einer blockdiagonalen Matrix.

```
mfmt = 1.0;             # Format zur Zahlendarstellung
mdef(A,6,6) =           # Definition der Matrix A
    0,0,1,0,1,0,
    0,0,0,2,0,0,
    1,0,0,0,1,0,
    0,2,0,0,0,2,
    1,0,1,0,0,0,
    0,0,0,2,0,0;

mpbu(A,B,P,N,U);        # Der mpbu-Befehl
mpr(B);                 # Ausdruck von B
mpr(P);                 # Ausdruck von P
mpr(N);                 # Ausdruck von N
mpr(U);                 # Ausdruck von U

     B           P      N      U
-----------     ---    ---    ---
0 1 1 0 0 0      5      2      1
1 0 1 0 0 0      3             4
1 1 0 0 0 0      1
0 0 0 0 2 0      6
0 0 0 2 0 2      4
0 0 0 0 2 0      2
```

aus der Matrix `A` neue Matrizen bzw. Vektoren zu erzeugen. Die Matrix `B` enthält die durch simultane Permutation von Zeilen und Spalten entstandene blockdiagonale Matrix. Der Vektor `P` gibt die Permutation an. Der Skalar `N` enthält die Anzahl der Blöcke. Und schließlich wird noch ein weiterer Vektor, in diesem Beispiel `U` genannt, erzeugt, dessen Koeffizienten angeben, in welchen Zeilen ein neuer Block beginnt.

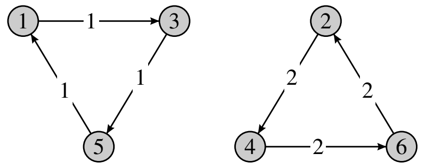
4. Die bisherigen Überlegungen bezogen sich auf ungerichtete Graphen, deren Adjazenzmatrix symmetrisch ist. Jetzt betrachten wir gerichtete Graphen mit nicht-symmetrischen Adjazenzmatrizen. Wiederum kann ein solcher Graph aus einer oder aus mehreren Komponenten bestehen. Wenn es mehrere Komponenten gibt, kann man zwei Fälle unterscheiden:

a) Es gibt keinerlei Verbindungen zwischen Knoten, die zu unterschiedlichen Komponenten gehören. D.h., wenn die Knoten i und j zwei verschiedenen Komponenten angehören, gibt es weder einen Weg von i nach j noch von j nach i.

b) Es gibt mindestens zwei Komponenten und mindestens einen Weg, der von einem Knoten i der ersten Komponente zu einem Knoten j der zweiten Komponente führt. Es ist auch klar, dass es dann keinen Weg geben kann, der von j nach i führt, denn andernfalls würden beide Knoten zur gleichen Komponente gehören.

Wir besprechen zuerst den Fall (a), dann den Fall (b). Es sei angemerkt, dass alle Berechnungen auch bei gerichteten Graphen bzw. unsymmetrischen Matrizen mit dem `mdbu`-Befehl durchgeführt werden können. Dies wird jedoch im folgenden nicht im einzelnen gezeigt.

5. Zur Illustration der ersten Möglichkeit wird folgender Graph betrachtet:



Wiederum gibt es zwei Komponenten und zu jeder Komponente eine Adjazenzmatrix, die einen Block in einer blockdiagonalen Gesamtmatrix bildet. Man kann z.B. folgender Umnummerierung der Knotennummern verwenden:

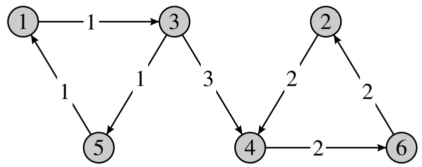
$$1 \rightarrow 3,\quad 2 \rightarrow 6,\quad 3 \rightarrow 1,\quad 4 \rightarrow 4,\quad 5 \rightarrow 2,\quad 6 \rightarrow 5$$

Eine simultane Permutation der Zeilen und Spalten der ursprünglichen Adjazenzmatrix liefert dann folgende blockdiagonale Matrix:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Allgemein kann festgehalten werden: Wenn ein gerichteter Graph in verbindungslose Komponenten zerfällt, kann man stets eine Umnummerierung der Knoten (eine simultane Permutation der Zeilen und Spalten der Adjazenzmatrix) finden, so dass die Adjazenzmatrix eine blockdiagonale Form bekommt. Die Blöcke entlang der Hauptdiagonalen sind dann gerade die Adjazenzmatrizen der Komponenten.

6. Etwas anders verhält es sich im Fall (b), wenn also zwischen mindestens zwei Komponenten eines gerichteten Graphen eine Verbindung besteht. Zur Illustration betrachten wir folgenden Graphen:



Wie im vorangegangenen Beispiel gibt es zwei Komponenten, aber zusätzlich einen Weg, der von der ersten zur zweiten Komponente führt. Wenn man jetzt die gleiche Umnummerierung vornimmt wie zuvor, findet man folgende Adjazenzmatrix:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bei der es sich nicht mehr um eine blockdiagonale Matrix handelt. Nach wie vor befinden sich jedoch entlang der Hauptdiagonalen quadratische Blöcke, und unterhalb dieser Blöcke gibt es nur Nullen. Der Unterschied besteht nur darin, dass sich jetzt auch oberhalb der Blöcke Koeffizienten befinden können, die nicht Null sind. Man spricht deshalb von einer *oberen Blockdiagonalmatrix*.[12]

7. Allgemein kann wieder folgendes festgehalten werden: Die Adjazenzmatrix eines gerichteten Graphen, der in zwei oder mehr Komponenten zerfällt, kann durch simultane Zeilen- und Spaltenpermutationen stets in die Form einer oberen Blockdiagonalmatrix gebracht werden, wobei die Blöcke entlang der Hauptdiagonalen die Adjazenzmatrizen der Komponenten sind. Eine solche Darstellung hat darüber hinaus eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft. Gibt es entlang der Hauptdiagonalen die Blöcke $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m$ und gibt es einen Weg, der von einem Knoten im Block $\mathbf{B}_i$ zu einem Knoten in einem Block $\mathbf{B}_j$ führt, dann ist $i < j$. Man erhält also eine lineare Ordnung der Blöcke.

[12] Ganz analog ist der Begriff einer *unteren Blockdiagonalmatrix* definiert. Dann müssen alle Koeffizienten oberhalb der Blöcke Null sein.

Kapitel 4

Beziehungen zwischen Unternehmen

In den folgenden Kapiteln beschäftigen wir uns mit Beziehungen zwischen Unternehmen. In den einleitenden Bemerkungen werden drei Aspekte, unter denen man solche Beziehungen betrachten kann, unterschieden. In den restlichen Abschnitten dieses Kapitels werden anhand eines exemplarischen Datensatzes personelle Verflechtungen besprochen.

4.1 Einleitende Bemerkungen

1. Von besonderem Interesse sind Beziehungen zwischen Unternehmen, durch die sie einseitig oder wechselseitig voneinander abhängig sind. Drei Aspekte können unterschieden werden:

a) Beziehungen, die darin bestehen, dass ein Unternehmen Güter verwendet, die von anderen Unternehmen produziert werden (Vorleistungsverflechtungen).

b) Beziehungen, die darin bestehen, dass ein Unternehmen mehr oder weniger grosse Anteile am (Aktien-) Kapital eines anderen Unternehmens besitzt (Kapitalverflechtungen).

c) Beziehungen, die darin bestehen, dass Personen gleichzeitig in zwei oder mehr Unternehmen Einfluss ausüben (personelle Verflechtungen).

2. In allen drei Fällen sind zur empirischen Erfassung relationale Daten erforderlich, die sich in Gestalt eines Graphen darstellen lassen. Die jeweils erfassten Unternehmen bilden die Knoten und die zwischen ihnen erfassten Beziehungen die Kanten des Graphen. Im allgemeinen wird es sich um bewertete Graphen handeln, wobei die Bewertungen im ersten Fall Güterströme, im zweiten Fall anteiligen Kapitalbesitz und im dritten Fall die Anzahl von Personen, die gleichzeitig in den Unternehmen bestimmte Positionen haben, erfassen. In den ersten beiden Fällen handelt es sich im allgemeinen um gerichtete Graphen, im dritten Fall können sowohl gerichtete als auch ungerichtete Graphen Verwendung finden.

3. Im weiteren werden wir folgendermaßen vorgehen. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit personellen Verflechtungen zwischen Unternehmen, wobei wir uns auf eine Erfassung ungerichteter Beziehungen beschränken, also Begriffsbildungen verwenden, die für ungerichtete Graphen definiert sind. Im nächsten Kapitel werden einige Aspekte von Kapitalverflechtungen diskutiert und einige hierfür entwickelte Analysemöglichkeiten besprochen. In den dann folgenden Kapiteln wird überlegt, wie sich erfassen lässt, dass Unternehmen auch in ihrer Güterproduktion voneinander abhängig sind. Die Überlegungen beginnen mit einfachen ökonomischen Modellen; im Anschluss werden Grundzüge der Input-Output-Rechnung besprochen und anhand von Input-Output-Tabellen für die BRD illustriert.

4.2 Personelle Verflechtungen

In den folgenden Abschnitten wird besprochen, wie man personelle Verflechtungen zwischen Unternehmen untersuchen kann. Zunächst wird anhand eines exemplarischen Datensatzes dargestellt, wie sich ein Graph erzeugen lässt, der die personellen Beziehungen erfasst. Dann werden einige Analysemöglichkeiten aufgezeigt.

4.2.1 Ein exemplarischer Datensatz

1. Die Daten wurden freundlicherweise von Prof. Paul Windolf (Universität Trier) zur Verfügung gestellt. Sie wurden im Rahmen eines DFG-Projekts zur international vergleichenden Untersuchung von Unternehmensverflechtungen erstellt.[1] Wir beschränken uns hier auf Unternehmen mit einem Stammsitz in Deutschland. Die Daten beziehen sich auf den Zeitraum 1992–93.

2. Die uns zugänglichen Daten bestehen aus einer Datenbank und einer Reihe von Files, die für das Computerprogramm UCINET aufbereitet wurden. Da in diesem Text das Programm TDA verwendet wird, wird auf die UCINET-Files im weiteren kein Bezug genommen. Auch aus der Datenbank verwenden wir zunächst nur zwei Files:

a) Das File `code.asc`, das eine Liste aller in die Analyse einbezogenen Unternehmen mit Stammsitz in Deutschland enthält. Jede Zeile besteht aus dem Namen eines Unternehmens, einer Identifikationsnummer (`UID`) und einer Information über das Stammkapital des Unternehmens. Insgesamt gibt es in diesem File 694 Einträge. Überwiegend, aber nicht ausschließlich, handelt es sich um Aktiengesellschaften.

b) Das File `pers.asc`, in dem sich Informationen über Personen befinden, die in den Unternehmen spezifische Positionen innehaben.

Beide Datenfiles wurden aus der Datenbank als gewöhnliche ASCII-Files

[1] Als Arbeiten, die aus dem Projekt hervorgegangen sind und in denen auf die Daten Bezug genommen wird, vgl. man Windolf (1997, 1998), Windolf und Beyer (1995, 1996) und Windolf und Nollert (2001).

Box 4.2.1 Einträge in `pers.asc` für Hermann Abs.

```
 396  Abs  HermannJDrhc          AREhrenvors
 218  Abs  HermannJDrpolhc       AREhrenvors
 401  Abs  HermannJDrhc          AR
 367  Abs  HermannJdrhc          ARehrenvors
 425  Abs  HermannJDrhc          AR(Ehrenvors)
  92  Abs  HermannJ              ARVeh
 449  Abs  HermannJDrhc          ARVeh
 215  Abs  HermannJDrpolhc       ARVeh
 159  Abs  HermannJDrhc          ARVeh
 114  Abs  HermannJDrhc          ARVeh
  14  Abs  HermannJDrhc          ARVeh
```

extrahiert, um sie für eine weitere Verwendung verfügbar zu machen.[2]

3. Uns interessiert hier vor allem das File `pers.asc` mit den Personeneinträgen. Jede Zeile enthält im wesentlichen folgende Angaben: den Namen, Vornamen und ggf. Titel der Person, die `UID` des Unternehmens, in dem die Person eine Position hat, und schließlich eine Angabe über die Art der Position, z.B. ob die Person Mitglied des Aufsichtsrats oder des Vorstands des Unternehmens ist. Insgesamt enthält das File 11866 Zeilen. In 448 Zeilen gibt es jedoch eine Unternehmensnummer (`UID`), die im Basisfile `code.asc` nicht vorkommt. Diese Zeilen haben wir deshalb ausgeschlossen, so dass 11418 Personeneinträge übrig bleiben. Natürlich entspricht nicht jeder Zeile eine unterschiedliche Person. Es ist ja gerade das Ziel, Personen zu finden, die gleichzeitig in zwei oder mehr Unternehmen eine Position haben, so dass durch sie Beziehungen zwischen Unternehmen hergestellt werden. Also besteht eine Aufgabe darin, die Personen zu identifizieren und ihnen eindeutige Personenidentifikationsnummern (`PID`) zu geben.

4. Auf den ersten Blick ist das einfach, denn man kennt ja den Vor- und Nachnamen der Person und außerdem ggf. vorhandene Titel. Allerdings gibt es trotzdem ein Problem, denn die Vornamen und Titel treten nicht immer in der gleichen Form auf. Z.B. zeigt Box 4.2.1 die Einträge für Hermann Abs. Würde man zur Identifikation nicht nur den Nachnamen, sondern auch den vollständigen Vornamen einschließlich der Titel verwenden, würden drei unterschiedliche Personen resultieren. Andererseits genügt es aber sicherlich nicht, nur den Nachnamen zu verwenden, da es zahlreiche verschiedene Personen gibt, die den gleichen Nachnamen haben. Da es keine perfekte Lösung für dieses Identifikationsproblem gibt, sind wir folgendermaßen vorgegangen: Wir haben den vollständigen Nachnamen und die ersten 5 Buchstaben des Vornamens verwendet. Als Ergebnis dieser Vorgehensweise findet man im Datenfile `pers.asc` 8525 unterschiedliche

[2] ASCII ist eine Abkürzung für *American Standard Code of Information Interchange*. Files, die diesen Code verwenden, können von den meisten Programmen gelesen und auch problemlos auf einem Computerbildschirm sichtbar gemacht werden.

Personenidentifikationsnummern (PID). Es handelt sich um fortlaufende Nummern von 1 bis 8525.

5. Ein weiteres Problem betrifft die Angaben über die Positionen, die die Personen in den Unternehmen innehaben. Untersucht man das File `pers.asc`, findet man insgesamt 61 unterschiedliche Arten von Einträgen, die sich jedoch teilweise auf gleiche oder ähnliche Positionen beziehen (man vgl. als Beispiel die Angaben für Hermann Abs in Box 4.2.1). Wir haben deshalb eine Rekodierung vorgenommen, bei der nur die folgenden Arten von Positionen unterschieden werden:

1 : Positionen im Aufsichtsrat eines Unternehmens
2 : Positionen im Vorstand eines Unternehmens
3 : Positionen in der Geschäftsführung eines Unternehmens
4 : Positionen als Gesellschafter eines Unternehmens
5 : Positionen im Betriebsrat eines Unternehmens
6 : Sonstige Positionen (Beirat, Berater u.ä.)

6. Box 4.2.2 zeigt das TDA-Skript, das wir verwendet haben, um die vorstehend beschriebenen Operationen durchzuführen. Als Ergebnis entsteht ein neues Datenfile `plist.dat` mit 11418 Zeilen. Box 4.2.3 zeigt die ersten Zeilen. Es gibt folgende Variablen:

`UID`	Identifikationsnummer des Unternehmens.
`POS`	Position im Unternehmen (vor der Rekodierung)
`POSN`	Position im Unternehmen (nach der Rekodierung)
`NPOS`	Anzahl der Positionen einer Person
`PID`	Identifikationsnummer der Person
`XName`	Nachname und 5 Buchstaben des Vornamens
`Position`	Ausgeschriebene Position

Für alle weiteren Berechnungen dient dieses File als Ausgangspunkt.

7. Zunächst wird untersucht, wie viele unterschiedliche Personen und Positionen es gibt. Eine einfache Auszählung (z.B. mit dem `freq`-Befehl) liefert folgende Häufigkeitsverteilung für die Variable `POSN`:

Position	1	2	3	4	5	6
Anzahl	7848	2452	965	42	26	85

In erster Linie handelt es sich also um Positionen in einem Aufsichtsrat oder Vorstand. Weiterhin kann man durch einfache Auszählungen berechnen, wie viele Personen mehrere Positionen haben. Wie bereits erwähnt wurde, gibt es in unserem Datenfile insgesamt 8525 Personen. Davon haben 6995 Personen nur eine Position, die restlichen 1530 Personen haben

Box 4.2.2 Skript zur Erzeugung der des Files `plist.dat`.

```
# Einlesen des Files pers.asc aus der Datenbank
nvar(
  dfile = pers.asc,                    # Datenfile
  noc = 12000,                         # Maximale Anzahl Zeilen
  UID = str(1,3),                      # Unternehmens-ID
  Name = str(12,41),                   # Name der Person
  VName = str(267,302),                # Vorname und Titel
  Position = str(522,546),             # Position
  POS[2.0] = strsp(Position),          # Numerischer Code
  UID1<2>[4.0] = strv(UID),            # Numerische Unternehmens-ID
);
nvar(                                  # Match mit dem Code-File
  dfile = code.asc,                    # Name des Files aus der Datenbank
  UID2<2>[4.0] = c2,                   # Numerische Unternehmens-ID
  match = UID2,UID1,                   # Match UID2 mit UID1
);
tsel = ne(UID2,-3);                    # Selektion der gueltigen Faelle
pdata(                                 # Erzeugung eines neuen Datenfiles
  keep = UID,Name,VName,Position, POS, # Nur diese Variablen
) = plist.1;                           # Name des neuen Datenfiles

# Einlesen von plist.1 und Erzeugung einer Personen-ID (PID)
# aus Name und den ersten 5 Buchstaben des Vornamens

clear;                                 # Loeschen der bisherigen Datenmatrix
nvar(                                  # Einlesen des Datenfiles dlist.1
  dfile = plist.1,                     # Name des Datenfiles
  noc = 12000,                         # Maximale Anzahl Zeilen
  ffmt = c1(99-100),                   # Spalten fuer die Variable POS

  UID = str(1,3),                      # Unternehmens-ID
  XName = str(5,40),                   # Name + 5 Buchstaben des Vornamens
  PID[5.0] = strsp(XName),             # Personen-ID

  Position = str(73,97),               # Position als String
  POS[2.0] = c1,                       # Numerische Position aus Spalte 1

  # Recodierung der Variablen POS
  POSN[2.0] = if POS[1,,14,20,43,,45]     then 1 else
              if POS[51,,54,56,,61]       then 2 else
              if POS[22,,29,48,49]        then 3 else
              if POS[30,,34,50]           then 4 else
              if POS[15,16,46,47]         then 5 else
              if POS[17,,19,21,35,,42,55] then 6 else -1,
);
pdata(                                 # Erzeugen des Files plist.2
  sort = PID,                          # Sortieren nach PID
  keep = UID,POS,POSN,PID,             # Nur diese Variablen
         XName,Position,
) = plist.2;                           # Ausgabefile
clear;                                 # Loeschen der Datenmatrix
nvar(                                  # Einlesen von plist.2
  dfile = plist.2,                     # Datenfile
  noc = 12000,                         # Maximale Anzahl Zeilen
  UID[4.0] = c1,                       # UID aus Spalte 1
  POS[2.0] = c2,                       # POS aus Spalte 2
  POSN[2.0] = c3,                      # POSN aus Spalte 3
  NPOS[2.0] = bnrec,                   # NPOS = Anzahl der Positionen
  PID[5.0] = c4,                       # Personen-ID aus Spalte 4
  XName = str(17,52),                  # String: XName
  Position = str(54,78),               # String: Position
  dblock = PID,                        # Blockmode
);
pdata = plist.dat;                     # Erzeugen des Files plist.dat
```

Box 4.2.3 Die ersten Zeilen des Datenfiles `plist.dat`.

```
532 56  2  1     1 Aacken                          PaulA V
 70  1  1  1     2 Abbott                          Kevin AR
349  1  1  1     3 Abel                            Roswi AR
194 56  2  1     4 Abelmann                        Horst V
 18 43  1  1     5 Abendroth                       Elisa StARV
489  1  1  2     6 Abraham                         Reinh AR
209  1  1  2     6 Abraham                         Reinh AR
396  9  1 11     7 Abs                             Herma AREhrenvors
218  9  1 11     7 Abs                             Herma AREhrenvors
401  1  1 11     7 Abs                             Herma AR
367 13  1 11     7 Abs                             Herma ARehrenvors
425  3  1 11     7 Abs                             Herma AR(Ehrenvors)
 92 12  1 11     7 Abs                             Herma ARVeh
449 12  1 11     7 Abs                             Herma ARVeh
215 12  1 11     7 Abs                             Herma ARVeh
159 12  1 11     7 Abs                             Herma ARVeh
114 12  1 11     7 Abs                             Herma ARVeh
 14 12  1 11     7 Abs                             Herma ARVeh
456  1  1  1     8 Abt                             Gisel AR
434 56  2  1     9 Abt                             KarlO V
744 58  2  1    10 Abt                             Wilfr VR
 30  1  1  2    11 Ache                            Heinz AR
225  1  1  2    11 Ache                            Heinz AR
```

zwei oder mehr Positionen. Folgende Tabelle zeigt die Häufigkeiten, mit denen mehrfache Positionen auftreten:

Anzahl	Häufigkeit	Anzahl	Häufigkeit	Anzahl	Häufigkeit
1	6995	6	35	11	11
2	950	7	29	13	1
3	286	8	18	15	1
4	118	9	13		
5	62	10	6		

Z.B. erkennt man, dass 950 Personen gleichzeitig zwei Positionen haben, eine Person hat sogar gleichzeitig 15 Positionen.

8. Dabei handelt es sich teilweise um Positionen der gleichen, teilweise um Positionen unterschiedlicher Art. Von Interesse sind insbesondere Fälle, in denen Personen unterschiedliche Arten von Positionen miteinander verknüpfen, z.B. gleichzeitig eine Position in einem Vorstand und in einem Aufsichtsrat haben. Um dies herauszufinden, haben wir das Skript in Box 4.2.4 verwendet. Zunächst wird das Datenfile `plist.dat` gelesen, um daraus die Werte der Variablen `POSN` und `PID` zu gewinnen. Dann wird mithilfe des `gde`-Befehls ein ungerichteter Graph erzeugt. Die Knotenmenge dieses Graphen besteht aus allen Werten, die es in der Variablen `POSN` gibt, in unserem Fall also aus den Zahlen $1,\ldots,6$ für die sechs unterschiedlichen Positionen. Der Graph wird nun konstruiert, indem gezählt wird, wie oft

Box 4.2.4 Skript zur Berechnung mehrfacher ungleicher Positionen.

```
nvar(                          # Einlesen des Datenfiles plist.dat
  dfile = plist.dat,           # Name des Datenfiles
  noc = 12000,                 # Maximale Anzahl Aeilen
  POSN = c3,                   # Variable POSN aus Spalte 3
  PID  = c5,                   # Variable PID aus Spalte 5
);
gde(                           # gde-Befehl zum Erzeugen eines Graphen
  df = plist.3,                # Name des Ausgabefiles
) = POSN,PID;                  # Variablen
```

der gleiche Wert der Variablen `PID` bei zwei unterschiedlichen Positionen gleichzeitig auftritt. Das Ergebnis der Berechnung wird in Form einer Kantenliste in das Ausgabefile `plist.3` geschrieben. In Form einer Adjazenzmatrix sieht das Ergebnis folgendermaßen aus:

	1	2	3	4	5	6
1	–	1462	147	45	37	44
2	1462	–	71	3	7	5
3	147	71	–	2	3	12
4	45	3	2	–	2	2
5	37	7	3	2	–	2
6	44	5	12	2	2	–

Man erkennt z.B., dass in 1462 Fällen eine Person gleichzeitig eine Position in einem Vorstand (2) und Aufsichtsrat (1) hat. Da es sich um einen ungerichteten Graphen handelt, ist die Adjazenzmatrix natürlich symmetrisch. Für die Hauptdiagonale erzeugt der `gde`-Befehl keine Werte. Allerdings gibt es auch Fälle, in denen die gleiche Person mehrfach die gleiche Position hat.

9. Um über diese Fälle eine Übersicht zu gewinnen, haben wir das Skript in Box 4.2.5 verwendet. Zunächst wird das File `plist.dat` gelesen, wobei jedoch nur Personen ausgewählt werden, die mindestens zwei Positionen haben (1530 Personen). Dann wird auf die rekodierte Position `POSN` Bezug genommen, und es werden neue Variablen erzeugt. `APOS1` zählt, wie oft bei einer Person die Position 1 vorkommt, entsprechend `APOS2` usw. Dann wird TDA's Blockmode verwendet, um die Datenmatrix in Blöcke zu zerlegen, wobei jede Person einen Block bildet. Infolgedessen kann eine Variable `SEL` definiert werden, die stets in der ersten Zeile eines Blocks den Wert 1 und andernfalls den Wert 0 annimmt. Im Anschluß wird mit dem `tsel`-Befehl von jedem Block die erste Zeile ausgewählt, und auf der Grundlage dieser ausgewählten Zeilen werden dann die Häufigkeitsverteilungen für die Variablen `APOS1` usw. erstellt. Somit erhält man für jede Positionsart eine Häufigkeitsverteilung. Tabelle 4.2.1 zeigt das Ergebnis. Bei jeder der

Box 4.2.5 Skript zur Berechnung mehrfacher gleicher Positionen.

```
nvar(                       # Einlesen des Datenfiles plist.dat
  dfile = plist.dat,        # Name des Datenfiles
  noc = 12000,              # Maximale Anzahl Zeilen
  isel = gt(c4,1),          # Sekektion Personen mit mehr als 1 Position

  PID[5.0]    = c5,                     # Personennummer
  POSN[2.0]   = c3,                     # Rekodierte Position
  APOS1[2.0] = gsum(POSN[1],PID),       # Anzahl Positionen der Art 1
  APOS2[2.0] = gsum(POSN[2],PID),       # Anzahl Positionen der Art 2
  APOS3[2.0] = gsum(POSN[3],PID),       # Anzahl Positionen der Art 3
  APOS4[2.0] = gsum(POSN[4],PID),       # Anzahl Positionen der Art 4
  APOS5[2.0] = gsum(POSN[5],PID),       # Anzahl Positionen der Art 5
  APOS6[2.0] = gsum(POSN[6],PID),       # Anzahl Positionen der Art 6
  dblock = PID,                         # Blockmode mit PID
  SEL = bfirst,                         # SEL = 1 fuer 1. Zeile im Block
);
tsel = SEL;                 # Selektion der jeweils ersten Zeile
freq = APOS1;               # Haeufigkeitsverteilungen fuer die
freq = APOS2;               # Variablen APOS1,...,APOS6
freq = APOS3;
freq = APOS4;
freq = APOS5;
freq = APOS6;
```

Tabelle 4.2.1 Verteilung der 1530 Personen mit mindestens zwei Positionen auf Positionen der gleichen Art.

Pos. 1		Pos. 2		Pos. 3		Pos. 4		Pos. 5		Pos. 6	
0	179	0	891	0	1362	0	1513	0	1519	0	1499
1	297	1	463	1	141	1	15	1	11	1	30
2	659	2	146	2	26	2	2			2	1
3	208	3	20	3	1						
4	73	4	2								
5	40	5	1								
6	28	6	3								
7	15	7	4								
8	11										
9	7										
10	10										
11	2										
14	1										

sechs Positionen zeigt die erste Spalte die Anzahl der Positionen, und die zweite Spalte gibt an, wie viele Personen mit einer derartigen Anzahl von Positionen es gibt. Z.B. erkennt man, dass 659 Personen genau 2 Positionen der Art 1 haben.

4.2.2 Beschreibung des Graphen

1. Nachdem im vorangegangenen Abschnitt eine Übersicht über das Personendatenfile `pers.asc` gewonnen wurde, soll in diesem Abschnitt mithilfe der daraus gewonnenen Daten (`plist.dat`) ein Graph erzeugt werden, der angibt, wie die Unternehmen personell verflochten sind. Wir orientieren uns zunächst an einer sehr einfachen Idee und definieren die Beziehung zwischen zwei Unternehmen durch die Anzahl der Personen, die gleichzeitig in beiden Unternehmen irgendeine Position innehaben.[3] Bezeichnet Ω die Menge der Identifikationsnummern für die Unternehmen, wird also eine relationale Variable

$$R : \Omega \times \Omega \longrightarrow \tilde{\mathcal{R}} := \{0, 1, 2, \ldots\}$$

definiert, so dass $R(i, j)$ angibt, wie viele Personen sowohl im Unternehmen i als auch im Unternehmen j eine Position haben. Hier muss sich jedoch noch eine weitere Überlegung anschließen, denn der resultierende Graph enthält auch isolierte Knoten, d.h. Unternehmen, die mit keinem anderen Unternehmen personell verbunden sind. Insgesamt gibt es in unserem Datensatz 52 solche Unternehmen. Da uns die personellen Verflechtungen interessieren, werden wir diese Unternehmen im folgenden nicht weiter berücksichtigen und nur diejenigen 603 Unternehmen betrachten, die mit irgendeinem anderen Unternehmen eine personelle Verflechtung aufweisen. Es ist jedoch auf jeden Fall bemerkenswert, wie gering der Anteil der nicht personell verflochtenen Unternehmen ist.

2. Schon jetzt lässt sich absehen, dass der resultierende Graph nur eine schwache Besetzung aufweisen wird, denn eine vollständige Adjazenzmatix hätte $603 \cdot 603 = 363609$ Einträge. Wir verwenden deshalb eine Kantenliste, die nur Kanten mit einer positiven Bewertung enthält. Zwischen jeweils zwei Unternehmen gibt es also nur dann eine Kante, wenn mindestens eine Person in beiden Unternehmen eine Position hat. Box 4.2.6 zeigt das Skript, das zur Erzeugung der Kantenliste verwendet worden ist. Als Ergebnis entsteht das Datenfile `pgraph.dat` mit 4377 Zeilen. Jede Zeile entspricht einer Kante des Graphen und hat drei Einträge: zuerst zwei Identifikationsnummern für Unternehmen, dann die Anzahl der Personen, die Positionen in beiden Unternehmen haben. Die Kantenliste beschreibt also einen ungerichteten bewerteten Graphen mit 603 Knoten und 4377 Kanten. Die maximale Kantenbewertung ist 21, d.h. es gibt einen Fall, in dem 21 Personen gleichzeitig Positionen in zwei Unternehmen haben.[4]

---

[3] Im Forschungsprojekt von Prof. Windolf wurden auch andere Varianten verwendet, bei denen die Art der Position berücksichtig wird.

[4] Es handelt sich um die Unternehmen mit den Nummern 104 und 765. Aus dem File `code.asc` erkennt man, das es sich um die Deutsche Aerospace AG und die Daimler Benz Luft und Raumfahrt Holding handelt.

Box 4.2.6 Skript zur Erzeugung der Kantenliste pgraph.dat.

```
nvar(                         # Einlesen des Filse plist.dat
  dfile = plist.dat,          # Filename
  noc = 12000,                # Maximale Anzahl Zeilen
  UID = c1,                   # Variable UID aus Spalte 1
  PID = c5,                   # Variable PID aus Spalte 5
);
gde(                          # Erzeugung der Kantenliste mit gde
  df = pgraph.dat,            # Name des Ausgabefiles
  ni = 1,                     # Ausschluss von Schlingen
) = UID,PID;                  # Verwendete Variablen
```

Box 4.2.7 Skript zur Berechnung von Komponenten.

```
nvar(                   # Einlesen des Graphen
  dfile = pgraph.dat,   # Name des Datenfiles
  noc = 4400,           # Maximale Anzahl Zeilen
  I = c1,               # Variable I: erste Spalte
  J = c2,               # Variable J: zweite Spalte
  V = c3,               # Variable V: dritte Spalte
);
gdd(                    # Definition des Graphen
  opt = 1,              # Kantenliste
  gt  = 2,              # ungerichtet, bewertet
) = I,J,V;              # Variablen der Kantenliste
gcon = gcon.dat;        # Berechnung von Komponenten
```

3. Um ein Verständnis des Graphen zu gewinnen, soll untersucht werden, wie viele Komponenten es gibt (vgl. Abschnitt 3.3). Die Berechnung kann mit dem in Box 4.2.7 angegebenen Skript erfolgen. Das Ausgabefile des gcon-Befehls zeigt, dass es 6 Komponenten gibt. Bei genauerer Betrachtung zeigt sich, dass es eine sehr große und 5 kleine Komponenten gibt. Die große Komponente umfasst 593 Unternehmen, die restlichen enthalten nur jeweils zwei Unternehmen. Fast alle Unternehmen in dem Graphen sind also direkt oder indirekt personell verflochten.

4. Jetzt wird untersucht, ob es Cliquen gibt. Die Berechnung kann mit dem gcliq-Befehl erfolgen, der bereits in Abschnitt 3.3 besprochen wurde. Ersetzt man in Box 4.2.7 den gcon-Befehl durch

```
gcliq = cliq.dat;
```

erhält man das Ausgabefile cliq.dat, das eine Übersicht über alle im Graphen vorhandenen Cliquen liefert. Box 4.2.8 zeigt die ersten Zeilen dieses Files. Die erste Spalte nummeriert die Komponenten des Graphen,[5] dann

[5]Cliquen kann es natürlich nur innerhalb von Komponenten geben; TDA berechnet deshalb die Cliquen separat für alle Komponenten eines Graphen.

Box 4.2.8 Anfang des mit gcliq erzeugten Files cliq.dat.

```
1   1   10   54  487  444  363  225  489  392  173  502  500
1   2    9   54  487  444  363  225  489  392  165  790
1   3    9   54  487  444  363  225  489  188  165  790
1   4    7   54  487  444  363  105  173  508
1   5    7   54  487  444  363  508  173  502
```

Box 4.2.9 Auswahl von Namen aus dem File code.asc.

```
nvar(                          # Lesen des Files code.asc
    dfile = code.asc,          # Name des Files
    UID[4.0] = c2,             # Variable UID aus Spalte 2
    Name = str(67,130),        # Name aus Spalten 67 bis 130
);
tsel = UID[ 98, 19,396,213,307,308,  # Auswahl der Zeilen mit
           149,158,197,271,312,319,  # diesen UIDs
           485,311,309];
pdata = namen.dat;             # Ausdruck der ausgewaehlten Faelle

Inhalt des Files namen.dat
--------------------------
 19 Allianz_AG_Holding._Berlin/Mnchen_
 98 Degussa_AG._Frankfurt_
213 Hoechst_AG._Frankfurt_
149 ESSO_AG._Hamburg_
158 Fichtel_&_Sachs_AG._Schweinfurt_
197 Hartmann_&_Braun_AG._Frankfurt_
271 Krauss-Maffei_AG._Mnchen_
307 Mannesmann_AG._Dsseldorf_
308 Mannesmann_Anlagenbau_AG._Dsseldorf_
309 Mannesmann_Demag_AG._Duisburg_
311 Mannesmann_Rexroth_GmbH._Lohr_
312 Mannesmannrhren-Werke_AG._Dsseldorf_
319 Mercedes_Benz_AG._Stuttgart_
396 RWE_AG._Essen_
485 VDO_Adolf_Schindling_AG._Schwalbach_
```

folgt in Spalte 2 die laufende Nummer der Clique und in Spalte 3 die Anzahl ihrer Mitglieder; die weiteren Spalten zeigen die Knotennummern der Cliquenmitglieder. Insgesamt gibt es in unserem Graphen 1573 Cliquen mit mindestens drei Mitgliedern. Die größte Clique umfasst 15 Unternehmen.

5. Jetzt kann man sich mit einzelnen Cliquen genauer beschäftigen. Z.B. kann man sich für die Namen derjenigen Unternehmen interessieren, die Mitglieder der größten Clique sind. Zu diesem Zweck kann man sich aus dem File cliq.dat die Identifikationsnummern der Cliquenmitglieder herausziehen und dann im File code.asc die zugehörigen Namen finden. Box 4.2.9 illustriert die Vorgehensweise und zeigt im unteren Teil den Inhalt des Files namen.dat, das die Namen der Cliquenmitglieder enthält.

Box 4.2.10 Berechnung einer Häufigkeitsverteilung der Cliquengrößen.

```
nvar(                       # Einlesen des Files cliq.dat
  dfile = cliq.dat,         # Name des Files
  noc = 1600,               # Maximale Anzahl Zeilen
  S = c3,                   # Variable S aus Spalte 3 (Cliquengroesse)
);
freq = S;                   # Berechnung der Haeufigkeitsverteilung

Ergebnis des freq-Befehls:

Index    S  Frequency   Pct   Cumulated    Pct
----------------------------------------------
    1    3     396.00  25.17     396.00  25.17
    2    4     396.00  25.17     792.00  50.35
    3    5     298.00  18.94    1090.00  69.29
    4    6     220.00  13.99    1310.00  83.28
    5    7     120.00   7.63    1430.00  90.91
    6    8      70.00   4.45    1500.00  95.36
    7    9      41.00   2.61    1541.00  97.97
    8   10      17.00   1.08    1558.00  99.05
    9   11      10.00   0.64    1568.00  99.68
   10   13       3.00   0.19    1571.00  99.87
   11   14       1.00   0.06    1572.00  99.94
   12   15       1.00   0.06    1573.00 100.00
----------------------------------------------
Sum           1573.00 100.00
```

6. Es ist jedoch klar, dass man auf diese Weise bestenfalls bei einigen wenigen Cliquen vorgehen kann. Wegen der großen Anzahl von Cliquen sind vielmehr statistische Methoden erforderlich, wenn man sich einen Überblick verschaffen will. Das Skript in Box 4.2.10 zeigt, wie man eine Häufigkeitsverteilung für die Größen der Cliquen berechnen kann. Man erkennt, dass es überraschend viele relativ große Cliquen gibt.

Box 4.3.1 Skript zur Erzeugung der Kantenliste `pgraph1.dat`.

```
nvar(                              # Einlesen des Filse plist.dat
  dfile = plist.dat,               # Filename
  noc = 12000,                     # Maximale Anzahl Zeilen
  UID = c1,                        # Variable UID aus Spalte 1
  PID = c5,                        # Variable PID aus Spalte 5
);
gde(                               # Erzeugung der Kantenliste mit gde
  df = pgraph1.dat,                # Name des Ausgabefiles
) = PID,UID;                       # Verwendete Variablen
```

4.3 Personennetzwerke

1. Bisher wurde ein Graph betrachtet, dessen Knoten Unternehmen sind und dessen Kantenbewertung die Anzahl der Personen erfasst, die in zwei Unternehmen gleichzeitig eine Position innehaben. Eine komplementäre Betrachtungsweise bezieht sich auf einen Graphen, dessen Knoten Personen sind und dessen Kantenbewertung erfasst, in wie vielen Unternehmen zwei Personen gleichzeitig eine Position haben. Um aus dem ursprünglich gegebenen Datenfile `pers.asc` diesen komplementären Graphen (im folgenden *Personennetzwerk* genannt) zu erzeugen, kann eine Variante des in Box 4.2.6 gezeigten Skripts dienen. Es ist nur erforderlich, im `gde`-Befehl die Reihenfolge der Variablen zu vertauschen: `gde = PID,UID`. Box 4.3.1 zeigt das modifizierte Skript. Schlingen schließen wir in diesem Fall nicht aus, damit sich der Graph auf die Gesamtheit der 8525 Personen bezieht. Die resultierende Kantenliste wird im folgenden `pgraph1.dat` genannt. Sie beschreibt einen ungerichteten bewerteten Graphen mit insgesamt 106545 Kanten. Die maximale Kantenbewertung ist 9, d.h. es gibt zwei Personen (Nr. 1297 und Nr. 2014), die gleichzeitig in 9 Unternehmen eine Position innehaben.

2. Wiederum kann untersucht werden, wie viele Komponenten und Cliquen es gibt.[6] Man findet, dass es 58 Komponenten gibt, davon eine große Komponente, die 8159 Knoten umfasst. Die restlichen Komponenten umfassen stets weniger als 25 Knoten. Weiterhin findet man 2207 Cliquen. Tabelle 4.3.1 zeigt die Häufigkeitsverteilung der Cliquengrößen.

3. Eine potentiell interessante Frage bezieht sich darauf, *wie* die Personen in das Netzwerk eingebunden sind. Ein möglicher Ansatz, um zu einer Antwort zu gelangen, geht von *knotenzentrierten Netzwerken* aus.[7] Das heißt,

[6] Die TDA-Skripte werden im folgenden nicht gezeigt, da sie mit geringfügigen Modifikationen denjenigen entsprechen, die zur Analyse des Graphen `pgraph.dat` verwendet wurden.

[7] In der Literatur wird auch von *ego-zentrierten Netzwerken* gesprochen.

Tabelle 4.3.1 Größenverteilung der Cliquen im Personennetzwerk.

Größe	Anzahl	Größe	Anzahl	Größe	Anzahl
3	240	16	74	29	6
4	338	17	71	30	6
5	343	18	50	31	3
6	278	19	42	32	5
7	185	20	23	33	2
8	111	21	19	35	1
9	76	22	20	37	3
10	33	23	22	40	1
11	23	24	27	42	1
12	13	25	12	47	1
13	12	26	20	54	1
14	42	27	25		
15	66	28	12		

man betrachtet gesondert für jede Person i die Gesamtheit der Personen, mit denen sie durch eine innerhalb des Graphen definierte Beziehung verbunden ist. Die Anzahl dieser Personen ist natürlich mit dem Grad von i identisch. Das knotenzentrierte Netzwerk für die Person i besteht aus ihr selbst und diesen $g(i)$ Personen, also insgesamt aus $n_i := 1+g(i)$ Personen, außerdem aus allen Kanten zwischen diesen Personen. Somit gibt es zwei Aspekte:

a) Die Größe des knotenzentrierten Netzwerks, die durch n_i angegeben wird, und

b) die Dichte des knotenzentrierten Netzwerks, die durch

$$d_i := \frac{2\,k_i}{n_i(n_i-1)}$$

definiert ist, wobei k_i die Anzahl der Kanten im knotenzentrierten Netzwerk ist.[8]

4. Zur Berechnung kann das in Box 4.3.2 angegebene Skript verwendet werden. Zunächst wird mit dem Datenfile `pgraph1.dat` ein ungerichteter bewerteter Graph erzeugt. Dann wird der `gnc`-Befehl benutzt, um ein neues File `gnc.dat` zu erzeugen, das für jeden Knoten des Graphen eine Zeile enthält. In den ersten beiden Spalten befinden sich die interne bzw. externe Knotennummer, in unserem Beispiel sind sie identisch: i. Dann folgen n_i, k_i und d_i. Die untere Hälfte der Box zeigt die ersten Zeilen des Files `gnc.dat`.[9]

[8] d_i kann zwischen 0 und 1 variieren. Wenn $d_i = 1$ ist, handelt es sich um eine Clique oder um einen Teil einer größeren Clique.

[9] Bei der Person Nr. 7 handelt es sich um Hermann Abs.

Box 4.3.2 Umfang und Dichte der knotenzentrierten Netzwerke.

```
nvar(                          # Einlesen des Files pgraph1.dat
  dfile = pgraph1.dat,         # Name des Files
  noc = 107000,                # Maximale Anzahl Zeilen
  I = c1,                      # Variable I aus Spalte 1
  J = c2,                      # Variable J aus Spalte 2
  V = c3,                      # Variable V aus Spalte 3
);
gdd(                           # Definition des Graphen
  opt = 1,                     # Kantenliste
  gt  = 2,                     # ungerichtet, bewertet
) = I,J,V;                     # Variablen
gnc = gnc.dat;                 # Erzeugung des Files gnc.dat

Die ersten von insgesamt 8525 Zeilen in gnc.dat

  1    1   17  136     1.0000
  2    2   18  153     1.0000
  3    3   14   91     1.0000
  4    4   16  120     1.0000
  5    5   19  171     1.0000
  6    6   50  628     0.5127
  7    7  256 3520     0.1078
  8    8   24  276     1.0000
  9    9   24  276     1.0000
 10   10   37  666     1.0000
 11   11   47  577     0.5338
 12   12   26  325     1.0000
```

Bemerkenswert sind die großen Werte für die Dichte. Bei 7041 Personen (83 % aller Personen) sind die knotenzentrierten Netzwerke Cliquen oder Bestandteil einer größeren Clique.

Kapitel 5

Kapitalverflechtungen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Kapitalverflechtungen zwischen Unternehmen. Dabei beschränken wir die Überlegungen auf Aktiengesellschaften, deren Aktienkapital sich im Besitz anderer Unternehmen oder auch von Privatpersonen befinden kann.

5.1 Direkte und indirekte Kontrolle

Kapitalverflechtungen können unter verschiedenen Aspekten betrachet werden. In den folgenden Abschnitten beginnen wir mit einer Diskussion der Frage, wie man davon sprechen kann, dass Kapitalbesitz Kontrolle ermöglicht.

5.1.1 Erläuterungen zur Fragestellung

1. Die grundlegende Idee besteht darin: Wenn i (ein Unternehmen oder eine Person) einen hinreichend großen Anteil am Kapital eines Unternehmens j besitzt, kann i das Unternehmen j kontrollieren. Handelt es sich beim Unternehmen j um eine Aktiengesellschaft, kann man auch eine bestimmte Grenze angeben: i muss die Mehrheit am Aktienkapital besitzen, um das Unternehmen j kontrollieren zu können. Wir werden für die folgenden Überlegungen annehmen, dass die Mehrheit bei mindestens 51 % erreicht ist.

2. Eine weiterführende Überlegung beruht auf einer Unterscheidung zwischen direkter und indirekter Kontrolle. Wenn i mindestens 51 % am Kapital des Unternehmens j besitzt, kann i das Unternehmen j *direkt* kontrollieren. Denkbar sind jedoch auch indirekte Formen der Kontrolle. Z.B. kann man sich vorstellen, dass i sowohl ein Unternehmen j_1 als auch ein Unternehmen j_2 direkt kontrollieren kann und dass j_1 und j_2 beide jeweils 30 % am Kapital eines Unternehmens k besitzen. Dann kann zwar weder j_1 noch j_2 das Unternehmen k direkt kontrollieren; aber i kann (vermittelt über j_1 und j_2) das Unternehmen k *indirekt* kontrollieren. Man kann sich vorstellen, dass solche indirekten Formen der Kontrolle auf vielen verschiedenen Umwegen und Ebenen möglich sind.

3. Zur Illustration der Problemstellung verwenden wir die in Tabelle 5.1.1 angegebenen fiktiven Daten für die Kapitalverflechtung bei 11 Unternehmen. Es handelt sich um einen gerichteten und bewerteten Graphen, dargestellt in Form einer Kantenliste. Die Kantenbewertungen a_{ij} geben an, wie viel Prozent des Kapitals des Unternehmens j im Besitz des Unternehmens

Tabelle 5.1.1 Kapitalverflechtung zwischen 11 Unternehmen in Form einer Kantenliste (fiktive Daten).

i	j	a_{ij}	i	j	a_{ij}	i	j	a_{ij}
1	2	55	3	5	55	7	6	30
1	3	51	3	6	30	7	8	30
1	7	20	3	7	40	8	4	25
1	9	15	4	9	40	9	1	60
2	4	30	4	10	15	11	6	22
3	4	10	5	8	30			

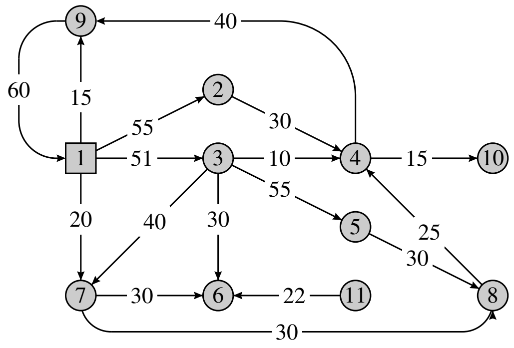


Abb. 5.1.1 Graphische Darstellung des Graphen aus Tab. 5.1.1.

i sind. Abbildung 5.1.1 zeigt den Graphen in einer graphischen Darstellung. Als Beispiel beziehen wir uns auf das Unternehmen Nr. 1. Offenbar kann dieses Unternehmen nur die Unternehmen Nr. 2 und Nr. 3 direkt kontrollieren. Es gibt jedoch darüber hinaus zahlreiche indirekte Kontrollmöglichkeiten. Z.B. kann Nr. 1 das Unternehmen Nr. 7 indirekt kontrollieren, und auf der nächsten Stufe (via Nr. 3 und Nr. 7) auch das Unternehmen Nr. 6. Schließlich findet man, dass Nr. 1 mit Ausnahme von Nr. 10 und Nr. 11 alle Unternehmen direkt oder indirekt kontrollieren kann.

4. In dem Beispiel gibt es noch eine Komplikation. Einerseits kann Nr. 1 das Unternehmen Nr. 9 indirekt kontrollieren; andererseits wird aber auch Nr. 1 durch Nr. 9 direkt kontrolliert. Also kann man allein aufgrund der formalen Struktur des Graphen nicht entscheiden, welches Unternehmen die Kontrolle ausübt. Ungeachtet dieses Problems kann man jedoch für jeden Knoten des Graphen fragen, welche der übrigen Knoten von ihm direkt und indirekt kontrolliert werden können. Weiterhin kann man fragen, welche Knoten in einem Graphen von keinem anderen Knoten kontrolliert werden können. In unserem Beispiel sind dies die Knoten Nr. 10 und Nr. 11.

5. Bereits in unserem Beispiel, bei dem es nur 11 Unternehmen gibt, ist es mühselig, alle direkten und indirekten Kontrollmöglichkeiten zu ermitteln. Um die erforderlichen Berechnungen durchzuführen, stellt TDA den `gfcf`-Befehl zur Verfügung. Box 5.1.2 zeigt ein Skript, mit dem für das Beispiel berechnet werden kann, welche Knoten durch andere Knoten direkt und indirekt kontrolliert werden können. Zunächst wird die Kantenliste aus Tabelle 5.1.1 eingelesen (wir haben sie `kf1.dat` genannt) und ein gerichteter und bewerteter Graph definiert. Dann folgt der `gfcf`-Befehl. Mit dem Parameter `sc` wird eine Zahl s angegeben. Bei der Ausführung des Befehls wird dann angenommen, dass eine Kontrollmöglichkeit immer dann gegeben ist, wenn die Summe des direkten und indirekten Kapitalbesitzes größer als s ist. In diesem Beispiel haben wir $s = 51$ gewählt. Weiterhin muss auf der rechten Seite des Befehls mindestens ein Ausgabefile angegeben werden; wir haben es `gfcf1.dat` genannt. Die beiden anderen Ausgabefiles sind optional.

6. Die untere Hälfte von Box 5.1.1 zeigt die Ausgabefiles, die für unser Beispiel erzeugt worden sind. Am einfachsten zu verstehen ist das Ausgabefile `gfcf2.dat`. Es enthält für jeden Knoten des Graphen eine Zeile. In jeder Zeile gibt es mindestens drei Einträge. Die ersten beiden Einträge zeigen die interne und externe Knotennummer (`i` und `ni`). Dann folgt die Anzahl der Knoten, die durch den Knoten `ni` direkt oder indirekt kontrolliert werden können. Schließlich werden auch noch die externen Nummern der kontrollierten Knoten angegeben. Man erkennt: Knoten Nr. 1 kann acht, Knoten Nr. 3 kann einen und Knoten Nr. 9 kann ebenfalls acht andere Knoten kontrollieren. Aus diesem File erkennt man auch, welche Knoten sich wechselseitig kontrollieren können.

7. Umgekehrt zeigt das Ausgabefile `gfcf3.dat`, ob ein Knoten von anderen Knoten kontrolliert werden kann. Dieses File enthält für jeden Knoten des Graphen eine Zeile. Die ersten beiden Einträge in jeder Zeile zeigen die interne und externe Knotennummer (`i` und `ni`). Dann folgt die Anzahl der Knoten (`K`), die den Knoten `ni` direkt oder indirekt kontrollieren können. Man erkennt, dass mit Ausnahme von Nr. 10 und Nr. 11 alle Knoten von mindestens einem anderen Knoten kontrolliert werden können. Z.B. kann Nr. 5 von drei anderen Knoten kontrolliert werden, nämlich von Nr. 1, Nr. 3 und Nr. 9.

8. Schließlich liefert das Ausgabefile `gfcf1.dat` detaillierte Informationen über die Struktur der Kontrollmöglichkeiten, indem Level (`L`) unterschieden werden. Level 1 erfasst die direkten Kontrollmöglichkeiten, Level 2 erfasst, welche weiteren Kontrollmöglichkeiten es gibt, wenn diejenigen des Levels 1 ausgenutzt werden. Allgemein erfasst Level l die Kontrollmöglichkeiten, die dadurch möglich werden, dass alle Kontrollmöglichkeiten der Level $1, \ldots, l-1$ genutzt werden. Das Ausgabefile enthält Informationen über alle Knoten, die mindestens einen anderen Knoten direkt oder indi-

Box 5.1.1 Skript zur Berechnung direkter und indirekter Kontrolle.

```
nvar(                        # Einlesen des files kf1.dat
  dfile = kf1.dat,           # Name des Files
  I = c1,                    # Variable I aus Spalte 1
  J = c2,                    # Variable J aus Spalte 2
  A = c3,                    # Variable A aus Spalte 3
);
gdd = I,J,A;                 # Definition des Graphen
gfcf(                        # Befehl zur Berechnung der Kontrolle
  sc = 50,                   # Mindestgroesse fuer Kontrolle
  df = gfcf2.dat,            # Zweites Ausgabefile
  ptab = gfcf3.dat,          # Drittes Ausgabefile
  opt = 2,                   # Option: nur kontrollierte Knoten
) = gfcf1.dat;               # Ausgabefile
```

Inhalt von gfcf1.dat

i	ni	nj	L	V	N
1	1	2	1	55.00	8
1	1	3	1	51.00	8
1	1	4	4	65.00	8
1	1	5	2	55.00	8
1	1	6	3	60.00	8
1	1	7	2	60.00	8
1	1	8	3	60.00	8
1	1	9	5	55.00	8
3	3	5	1	55.00	1
9	9	1	1	60.00	8
9	9	2	2	55.00	8
9	9	3	2	51.00	8
9	9	4	5	65.00	8
9	9	5	3	55.00	8
9	9	6	4	60.00	8
9	9	7	3	60.00	8
9	9	8	4	60.00	8

Inhalt von gfcf3.dat

i	ni	K
1	1	1
2	2	2
3	3	2
4	4	2
5	5	3
6	6	2
7	7	2
8	8	2
9	9	1
10	10	0
11	11	0

Inhalt von gfcf2.dat

i	ni	N	Nummern der kontrollierten Knoten							
1	1	8	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	0								
3	3	1	5							
4	4	0								
5	5	0								
6	6	0								
7	7	0								
8	8	0								
9	9	8	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	0								
11	11	0								

rekt kontrollieren können. Die ersten beiden Einträge zeigen die interne und externe Knotennummer. Für jeden dieser Knoten gibt es eine variable Anzahl von Zeilen, die in der Spalte `N` angegeben ist. Sie entspricht der Anzahl der kontrollierten Knoten.[1] Die dritte Spalte enthält die externe Nummer des kontrollierten Knotens. In der vierten Spalte wird angegeben, auf welchem Level der Knoten kontrolliert werden kann. Und schließlich wird in der fünften Spalte angegeben, mit welchem direkten und indirekten Kapitalbesitz der Knoten kontrolliert werden kann. Z.B. erkennt man, dass Nr. 1 auf dem Level 1 die Knoten Nr. 2 und 3 kontrollieren kann, auf dem Level 2 können die Knoten Nr. 5 und 7 kontrolliert werden. Usw.

5.2 Lineare und zyklische Graphen

1. Eine zwar nicht hinreichende, jedoch notwendige Bedingung dafür, dass sich zwei Knoten wechselseitig kontrollieren können, besteht darin, dass es im Graphen Wege gibt, die zu ihrem Ausgangspunkt zurückkehren. Solche Wege werden *Zyklen* oder *Kreise* genannt. Ein Graph wird *linear* (oder *azyklisch* oder *kreisfrei*) genannt, wenn er keine Zyklen enthält. Da es für viele Analysen wichtig ist, ob ein Graph Zyklen enthält oder nicht, soll in diesem Abschnitt besprochen werden, wie man das prüfen kann.

2. Es gibt zwei unterschiedliche Fragestellungen. Eine erste Frage bezieht sich darauf, ob ein Graph mindestens einen Zyklus enthält oder nicht. Eine zweite Frage ist, wie man sich eine Übersicht über alle Zyklen verschaffen kann, die in einem Graphen enthalten sind. Offenbar kann man die erste Frage beantworten, wenn man weiß, wie man eine Antwort auf die zweite Frage finden kann. Wir besprechen deshalb in diesem Abschnitt einen TDA-Befehl, mit dem man alle Zyklen in einem gerichteten Graphen finden kann. Optional kann dieser Befehl auch verwendet werden, um die erste Frage zu beantworten. Die Ausführung wird dann einfach abgebrochen, sobald ein Zyklus gefunden worden ist. Es sei angemerkt, dass größere Graphen eine sehr große Anzahl von Zyklen enthalten können, so dass es praktisch kaum noch möglich ist, alle Zyklen explizit zu berechnen.

3. Zur Illustration verwenden wir den in Abb. 5.1.1 angegebenen Graphen. Box 5.2.1 zeigt ein Skript, mit dem die Zyklen berechnet werden können. Zunächst wird die Kantenliste aus dem Datenfile `kf1.dat` gelesen und ein gerichteter Graph definiert. Dann wird der `gdcyc`-Befehl verwendet, um ein Ausgabefile `cyc.dat` zu erzeugen, das eine Liste aller Zyklen enthält, die im Graphen vorhanden sind. Die untere Hälfte der Box zeigt, wie in diesem Beispiel das Ausgabefile aussieht. Die erste Spalte enthält eine laufende Nummer für die Zyklen. Man erkennt, dass es in diesem Beispiel 6 Zyklen gibt. Dann folgt die Anzahl der Knoten, aus denen der Zyklus besteht. Und schließlich folgen die (externen) Nummern der Knoten in ihrer zyklischen Reihenfolge. Z.B. sieht man, dass der kürzeste Zyklus beim Knoten Nr. 1 beginnt und dann zum Knoten Nr. 9 führt. Vom jeweils zuletzt angeführten Knoten gibt es eine direkte Verbindung zum Ausgangsknoten.

[1] Dies gilt dann, wenn man für die Ausführung des Befehls den Parameter `opt = 2` angegeben hat. Andernfalls werden alle Knoten des Graphen angegeben, auch diejenigen, die nicht kontrolliert werden können.

Box 5.2.1 Berechnung der Zyklen in dem in Abb. 5.1.1 angegebenen Graphen.

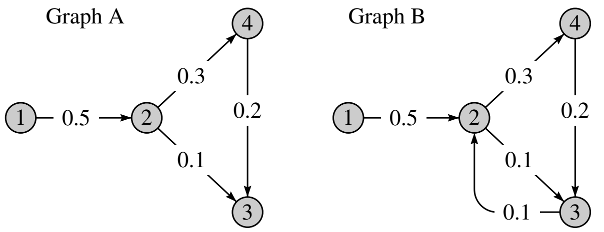
```
nvar(                      # Einlesen des files kf1.dat
  dfile = kf1.dat,         # Name des Files
  I = c1,                  # Variable I aus Spalte 1
  J = c2,                  # Variable J aus Spalte 2
  A = c3,                  # Variable A aus Spalte 3
);
gdd = I,J,A;               # Definition des Graphen
gdcyc = cyc.dat;           # Befehl zur Zyklenberechnung


Ausgabefile cyc.dat

C    N    Knoten im Zyklus
-------------------------------------
1    4    1    2    4    9
2    4    1    3    4    9
3    6    1    3    5    8    4    9
4    6    1    3    7    8    4    9
5    5    1    7    8    4    9
6    2    1    9
```

5.3 Direkter und indirekter Kapitalbesitz

In den folgenden Abschnitten beschäftigen wir uns mit der Frage, wie sich nicht nur der direkte, sondern auch der indirekte Kapitalbesitz an Unternehmen erfassen lässt. Zuerst wird die Fragestellung erläutert, dann wird ein Rechenverfahren dargestellt, das sich auch für große Netzwerke eignet.

5.3.1 Fragestellung und Rechenmethode

1. Um die Fragestellung zu erläutern, betrachten wir zwei Varianten einer Kapitalverflechtung zwischen vier Unternehmen:



Zuerst betrachten wir den Graphen A. Nr. 1 besitzt 50 % am Kapital von Nr. 2, Nr. 2 besitzt 10 % am Kapital von Nr. 3 und 30 % am Kapital von Nr. 4, und Nr. 4 besitzt 20 % am Kapital von Nr. 3. Dies sind die *direkten* Besitzverhältnisse. Darüber hinaus kann man nach *indirektem* Besitz fragen. Z.B. kann man sagen, dass der Besitzanteil von Nr. 1 an Nr. 4 den Wert $0.5 \cdot 0.3 = 0.15$ und der Besitzanteil von Nr. 1 an Nr. 3 den Wert

$$0.5 \cdot 0.1 + 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.2 \;=\; 0.08$$

hat. Berechnungen dieser Art sind offenbar unproblematisch, wenn der Verflechtungsgraph keine Zyklen aufweist. In Graph B gibt es jedoch Zyklen. Wie kann man in diesem Fall den indirekten Kapitalbesitz berechnen?

2. Wir folgen im weiteren einem Vorschlag von Baldone, Brioschi und Paleari (1997). Ausgangspunkt ist ein gerichteter und bewerteter Kapitalverflechtungsgraph mit n Knoten $i = 1, \ldots, n$. Mit a_{ij} wird der Anteil des Kapitals des Unternehmens j bezeichnet, den das Unternehmen i direkt besitzt. Wir nehmen an, dass diese Anteile als Dezimalbrüche ($0 \leq a_{ij} \leq 1$) gegeben sind, so dass gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \;\leq\; 1 \qquad (\text{für } j = 1, \ldots, n)$$

Gesucht ist nun eine sinnvolle Definition für Koeffizienten y_{ij}, die angeben,

welchen Anteil am Kapital von Unternehmen j das Unternehmen i direkt *und indirekt* besitzt. Der Vorschlag von Baldone, Brioschi und Paleari orientiert sich an folgender Buchführungsgleichung:

$$y_{ij} \;=\; a_{ij} + \sum_{k \neq i} y_{ik}\, a_{kj} \tag{5.3.1}$$

Der erste Summand soll den direkten, die dann folgende Summe den indirekten Kapitalbesitz erfassen.

3. Um eine Lösung für das Gleichungssystem zu finden, ist es nützlich, die Matrixschreibweise zu verwenden. Zunächst liefert eine äquivalente Umformung von (5.3.1) das Gleichungssystem

$$y_{ij} \;=\; (1 - y_{ii})\, a_{ij} + \sum_{k=1}^{n} y_{ik}\, a_{kj}$$

Es sei nun $\mathbf{Y} = (y_{ij})$, $\mathbf{A} = (a_{ij})$ und $\mathbf{I}$ eine (n, n)-Einheitsmatrix. Dann erhält man in der Matrixschreibweise folgende Formulierung für das Gleichungssystem:

$$\mathbf{Y} \;=\; (\mathbf{I} - \operatorname{diag}(\mathbf{Y}))\, \mathbf{A} \;+\; \mathbf{Y}\mathbf{A} \tag{5.3.2}$$

wobei $\operatorname{diag}(\mathbf{Y})$ die aus den Hauptdiagonalelementen von $\mathbf{Y}$ gebildete Diagonalmatrix

$$\operatorname{diag}(\mathbf{Y}) \;=\; \begin{bmatrix} y_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & y_{nn} \end{bmatrix}$$

bezeichnet. Im Anhang A.5 wird gezeigt, wie und unter welchen Bedingungen man für das Gleichungssystem (5.3.2) eine Lösung finden kann. Folgende Formel liefert das Ergebnis:

$$\mathbf{Y} \;=\; \operatorname{diag}\left((\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right)^{-1} \mathbf{A}\, (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \tag{5.3.3}$$

4. Zur Illustration verwenden wir die beiden eingangs angeführten Graphen A und B. Box 5.3.1 zeigt ein Skript, das die Matrix-Befehle von TDA verwendet, um die Formel (5.3.3) zu berechnen. Zunächst wird die Adjazenzmatrix für den Graphen A definiert, dann werden die in der Box kommentierten Rechenschritte ausgeführt. Schließlich wird die Matrix $\mathbf{Y}$ ausgedruckt. Die untere Hälfte der Box zeigt das Ergebnis, das offensichtlich mit den zu Beginn dieses Abschnitts durchgeführten Berechnungen übereinstimmt.

5. Box 5.3.2 zeigt die Berechnung für den Graphen B. Das Skript ist natürlich im wesentlichen identisch mit dem in Box 5.3.1, nur die Definition der Adjazenzmatrix wurde so geändert, dass sie dem Graphen B

Box 5.3.1 Direkter und indirekter Kapitalbesitz im Graphen A.

```
mdef(A,4,4) = 0.0, 0.5, 0.0, 0.0,    # Definition der A-Matrix
              0.0, 0.0, 0.1, 0.3,
              0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
              0.0, 0.0, 0.2, 0.0;
mdefi(4,4,I);                        # Definition der Einheitsmatrix
mexpr(I - A, IA);                    # IA = I - A
mginv(IA,IAI);                       # IAI = Inverse von IA
mdiagd(IAI,IAIV);                    # IAIV = Diagonale von IAI
mdiag(IAIV,IAD);                     # IAD = diag(IAI)
minvd(IAD,IADI);                     # IADI = Inverse von IAD
mmul(IADI,A,IAI,Y);                  # Y = IADI * A * IAI
mpr(Y);                              # Ausdruck

Ergebnis des Ausdrucks der Matrix Y:

0.0000     0.5000     0.0800     0.1500
0.0000     0.0000     0.1600     0.3000
0.0000     0.0000     0.0000     0.0000
0.0000     0.0000     0.2000     0.0000
```

Box 5.3.2 Direkter und indirekter Kapitalbesitz im Graphen B.

```
mdef(A,4,4) = 0.0, 0.5, 0.0, 0.0,    # Definition der A-Matrix
              0.0, 0.0, 0.1, 0.3,
              0.0, 0.1, 0.0, 0.0,
              0.0, 0.0, 0.2, 0.0;
mdefi(4,4,I);                        # Definition der Einheitsmatrix
mexpr(I - A, IA);                    # IA = I - A
mginv(IA,IAI);                       # IAI = Inverse von IA
mdiagd(IAI,IAIV);                    # IAIV = Diagonale von IAI
mdiag(IAIV,IAD);                     # IAD = diag(IAI)
minvd(IAD,IADI);                     # IADI = Inverse von IAD
mmul(IADI,A,IAI,Y);                  # Y = IADI * A * IAI
mpr(Y);                              # Ausdruck

Ergebnis des Ausdrucks der Matrix Y:

0.0000     0.5081     0.0813     0.1524
0.0000     0.0160     0.1600     0.3000
0.0000     0.1000     0.0160     0.0300
0.0000     0.0202     0.2020     0.0061
```

entspricht. Die untere Hälfte der Box zeigt wieder die Koeffizienten der Matrix $\mathbf{Y}$. Offenbar hat das Vorhandensein eines Zyklus im Graphen B dazu geführt, dass sich einige Koeffizienten verändert haben. Bemerkenswert ist auch, dass jetzt y_{ii} bei den Knoten 2, 3 und 4 einen positiven Wert annimmt. Es sind dies genau diejenigen Knoten, die einen positiven Eingangsgrad haben und insofern von der durch den Zyklus bewirkten „Rückkopplung" betroffen sind.

5.3.2 Eine alternative Rechenmethode

1. Ein Nachteil des im vorangegangenen Abschnitt besprochenen Rechenverfahrens besteht darin, dass die erforderlichen Rechenschritte stets für die gesamte Adjazenzmatrix des Kapitalverflechtungsgraphen durchgeführt werden müssen. Das kann auch zu Speicherplatzproblemen führen. Als Beispiel kann man sich vorstellen, dass die Kapitalverflechtung bei 30000 Unternehmen erfasst wurde. Bereits die Adjazenzmatrix $\mathbf{A}$ hat dann 900 Mio. Zellen. Außerdem können bei solchen sehr großen Matrizen leicht numerische Probleme bei der Matrixinversion auftreten. Es ist deshalb sinnvoll, alternative Rechenmethoden in Betracht zu ziehen.

2. Wir nehmen an, dass die Kapitalverflechtung zwischen n Knoten (Unternehmen) in Form eines gerichteten und bewerteten Graphen $\mathcal{G}$ erfasst worden ist. Um auf die Knoten Bezug zu nehmen, werden die natürlichen Zahlen $1,\ldots,n$ verwendet. Die Knotenmenge ist also $\mathcal{N} := \{1,\ldots,n\}$. Die Kantenbewertungen seien durch die Koeffizienten einer Adjazenzmatrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$ gegeben, so wie dies im vorangegangenen Abschnitt besprochen wurde. Typischerweise handelt es sich, insbesondere wenn n groß ist, um eine sehr schwach besetzte Matrix, in der nur wenige positive Koeffizienten auftreten. Infolgedessen ist es zweckmäßig, den Graphen nicht in Form einer Adjazenzmatrix, sondern in Form einer Kantenliste zu speichern. Aber dies ist für die folgende Überlegung nicht wesentlich.

3. Sei nun $i \in \mathcal{N}$ irgend ein Knoten, dessen direkten und indirekten Kapitalbesitz man untersuchen möchte. Zur Notation verwenden wir wie im vorangegangenen Abschnitt die Koeffizienten y_{ij}, die angeben, welchen Anteil am Kapital des Knotens j der Knoten i direkt und indirekt besitzt (im Unterschied zum Koeffizienten a_{ij}, der nur den direkten Kapitalbesitz erfasst). Gesucht sind also die Werte von y_{ij} für alle Knoten $j = 1,\ldots,n$. Nun ist jedoch unmittelbar einsichtig, dass y_{ij} nur dann einen positiven Wert annehmen kann, wenn es mindestens einen Weg gibt, der von i zu j führt. Es ist deshalb zur Berechnung gar nicht erforderlich, den gesamten Verflechtungsgraphen zu betrachten, sondern nur diejenigen Knoten, die von i ausgehend durch mindestens einen Weg erreichbar sind. Die Menge dieser Knoten wird im folgenden $\mathcal{N}_i$ genannt.

4. Die Definition umfasst zwei Fälle. Wenn es keinen Weg gibt, der ausgehend vom Knoten i wieder zu diesem Knoten zurückführt, dann ist i kein Element von $\mathcal{N}_i$,[2] und infolgedessen ist auch $y_{ii} = 0$. Wenn es andererseits mindestens einen beim Knoten i beginnenden Zyklus gibt, wird

[2] Wenn außerdem der Teilgraph mit der Knotenmenge $\{i\} \cup \mathcal{N}_i$ linear ist, kann man den direkten und indirekten Kapitalbesitz y_{ij} auf einfache Weise dadurch ermitteln, dass man der Reihe nach alle Wege von i nach j verfolgt und die Kantenbewertungen innerhalb jedes Wegs multipliziert und am Schluß aufsummiert. Man vgl. die im vorangegangenen Abschnitt am Beispiel des Graphen A durchgeführte Berechnung.

Box 5.3.3 Algorithmus zur Berechung des direkten und indirekten Kapitalbesitzes für einen Knoten i.

(1) $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{a}_i,\ \mathbf{y} \leftarrow 0$

(2) für alle $j \in \mathcal{N}_i$:

  für alle $k \in \mathcal{E}_j$:

   wenn $k = i$, dann: $y_j \leftarrow y_j + a_{ij}$

   andernfalls: $y_j \leftarrow y_j + u_k\, a_{kj}$

(3) wenn $\max_j\{|\, u_j - y_j\,|\} \leq \epsilon$, dann Ende;

  andernfalls: $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{y},\ \mathbf{y} \leftarrow 0$ und Fortsetung bei (2)

y_{ii} einen positiven Wert annehmen. (Wie bereits im vorangegangenen Abschnitt festgestellt wurde, wird angenommen, dass $a_{ii} = 0$ ist, so dass es keine Schlingen gibt.)

5. Jetzt besprechen wir eine Methode zur Berechnung von y_{ij}, die in beiden Fällen anwendbar ist. Box 5.3.3 zeigt in schematischer Form den Algorithmus. Dabei werden folgende Notationen verwendet. $\mathcal{N}_i$ ist die Menge der Knoten, die durch mindestens einen Weg von i aus erreichbar sind. $\mathcal{E}_j$ ist die Menge der Knoten, von denen ausgehend eine Kante zum Knoten j existiert. $\mathbf{a}_i$ ist die i-te Zeile der Adjazenzmatrix $\mathbf{A}$. Schließlich sind

$$\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \qquad \text{und} \qquad \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$$

zwei Zeilenvektoren der Länge n. Die Koeffizienten des Vektors $\mathbf{y}$ enthalten am Schluß die Werte y_{ij} $(= y_j)$; der Vektor $\mathbf{u}$ erfasst die zum Beginn jeder Iteration des Algorithmus verfügbaren vorläufigen Näherungswerte für $\mathbf{y}$.

6. Der Algorithmus funktioniert folgendermaßen: Zuerst wird der Vektor $\mathbf{a}_i$ in den Vektor $\mathbf{u}$ kopiert und der Vektor $\mathbf{y}$ gleich Null gesetzt.[3] Dann werden der Reihe nach alle Knoten $j \in \mathcal{N}_i$ betrachtet und außerdem alle Kanten, die von irgendeinem Knoten k zum Knoten j führen. Dann gibt es zwei Möglichkeiten. Wenn $k = i$ ist, wenn also eine Kante von i zu j führt, wird der direkte Kapitalbesitz a_{ij} zu y_j addiert; andernfalls wird das Produkt $u_k\, a_{kj}$ addiert, wobei u_k den bisher ermittelten indirekten Kapitalbesitz von i an j enthält. Nachdem auf diese Weise alle Knoten in $\mathcal{N}_i$ betrachtet worden sind, hat man neue Werte für den Vektor $\mathbf{y}$, also eine bessere Näherung für die zu berechnenden Werte y_{ij}, und kann sie mit der bisherigen Näherung, die durch den Vektor $\mathbf{u}$ dargestellt wird, vergleichen. Dies geschieht im Schritt (3) des Algorithmus. Es wird der maximale Unterschied zwischen den Koeffizienten in $\mathbf{u}$ und $\mathbf{y}$ berechnet;

[3] Die Pfeile sollen andeuten, dass der Ausdruck auf der linken Seite die auf der rechten Seite angegebenen Werte bekommt.

Box 5.3.4 Skript zur Berechnung des integrierten Kapitalbesitzes mit dem `gio`-Befehl für den Graphen B.

```
nvar(                      # Einlesen der Kantenliste klist.b
  dfile = klist.b,         # Name des Datenfiles
  I = c1,                  # Variable I aus Spalte 1
  J = c2,                  # Variable J aus Spalte 2
  V = c3,                  # Variable V aus Spalte 3
);
gdd = I,J,V;               # Definition des Graphen
gio = gio.dat;             # gio-Befehl

Inhalt des Files gio.dat

i   ni   nj  a(i,j)  y(i,j)    N   IT
-------------------------------------
1    1    1  0.0000  0.0000    4    4
1    1    2  0.5000  0.5081    4    4
1    1    3  0.0000  0.0813    4    4
1    1    4  0.0000  0.1524    4    4
2    2    2  0.0000  0.0160    3    2
2    2    3  0.1000  0.1600    3    2
2    2    4  0.3000  0.3000    3    2
3    3    2  0.1000  0.1000    3    1
3    3    3  0.0000  0.0160    3    1
3    3    4  0.0000  0.0300    3    1
4    4    2  0.0000  0.0202    3    2
4    4    3  0.2000  0.2020    3    2
4    4    4  0.0000  0.0061    3    2
```

und wenn dieser maximale Unterschied kleiner als eine vorgegebene Genauigkeitsschranke ϵ ist, kann man abbrechen. Andernfalls muss eine neue Iteration erfolgen, die in Schritt (3) dadurch vorbereitet wird, dass der Vektor $\mathbf{u}$ die Werte der besseren Näherung $\mathbf{y}$ bekommt und $\mathbf{y}$ hinterher gleich Null gesetzt wird. Wenn es überhaupt eine Lösung gibt, konvergiert der Algorithmus meistens sehr schnell und liefert das gleiche Ergebnis wie das im vorangegangenen Abschnitt besprochene Rechenverfahren.

7. TDA stellt diesen Algorithmus in Form des `gio`-Befehls zur Verfügung. Zur Illustration verwenden wir diesen Befehl, um den integrierten (direkten und indirekten) Kapitalbesitz für den im vorangegangenen Abschnitt angegebenen Graphen B zu berechnen. Box 5.3.4 zeigt das hierfür verwendete Skript. Zuerst wird das Datenfile `klist.b` eingelesen, dass die Kantenliste für den Graphen B enthält. Dann wird mit dem `gdd`-Befehl ein gerichteter und bewerteter Graph definiert. Schließlich wird mit dem `gio`-Befehl der Algorithmus zur Berechnung des integrierten Kapitalbesitzes ausgeführt. Die untere Hälfte der Box zeigt den Inhalt des durch den `gio`-Befehl erzeugten Files `gio.dat`. Für jedes Knotenpaar (i, j) gibt es eine Zeile, wenn es einen Weg gibt, der von i zu j führt, so dass man sagen kann, dass der Knoten i einen direkten und/oder indirekten Kapitalanteil am Knoten j

besitzt. Die ersten beiden Spalten geben die interne bzw. externe Nummer des Knotens i an, die dritte Spalte die externe Nummer des Knotens j. In den nächsten beiden Spalten werden der direkte Kapitalanteil (a_{ij}) und der integrierte Kapitalanteil (y_{ij}) angegeben. Die dann folgende Spalte `N` zeigt, wie viele Knoten sich in der Menge $\mathcal{N}_i$ befinden; und die letzte Spalte gibt an, wie viele Iterationen benötigt wurden, um die vorgegebene Genauigkeitsschranke zu erreichen.[4] Offenbar sind die Rechenergebnisse mit den in Box 5.3.2 angegebenen identisch.

[4] Die Voreinstellung ist $\epsilon = 0.0001$. Sowohl diese Schranke als auch die maximale Anzahl der Iterationen kann jedoch beim Aufruf des Befehls angegeben werden.

Kapitel 6

Gesellschaftliche Produktion

In diesem Kapitel wird besprochen, wie man mithilfe einer relationalen Betrachtungsweise auch einige ökonomische Zusammenhänge verstehen kann.[1] Das Wort ‘Ökonomie’ soll sich hierbei auf die Gesamtheit der Tätigkeiten beziehen, durch die Menschen Güter produzieren und austauschen.[2] In diesem Kapitel wird ein einfaches Modell der Güterproduktion besprochen. Von einem Modell wird gesprochen, um darauf hinzuweisen, dass es zunächst nicht um eine empirische Erfassung ökonomischer Sachverhalte geht, sondern um die Entwicklung eines Begriffsrahmens, um über ökonomische Zusammenhänge nachzudenken. Wie man einen ähnlichen gedanklichen Ansatz für empirische Untersuchungen nutzbar machen kann, wird in Kap. 8 besprochen.

6.1 Ein Modell der Güterproduktion

Wir beginnen mit einem einfachen Modell der Güterproduktion. Die Idee besteht darin, dass es Produktionseinheiten gibt, die Güter unterschiedlicher Art produzieren, wofür sie als Vorleistungen wiederum andere Güter benötigen. Insofern kann man von *gesellschaftlicher* Produktion sprechen, in der die Produktionseinheiten voneinander abhängig sind.

6.1.1 Der Modellansatz

1. Als Ausgangspunkt wird angenommen, dass es n Produktionseinheiten gibt, auf die durch die Namen $\omega_1, \dots, \omega_n$ (oder abkürzend durch die Nummern $1, \dots, n$) verwiesen werden kann. Im allgemeinen kann jede Produktionseinheit entweder nur eine bestimmte Gütersorte oder mehrere unterschiedliche Arten von Gütern produzieren. Für das einfache Modell, mit dem wir beginnen, soll angenommen werden, dass alle Produktionseinheiten unterschiedliche Arten von Gütern erzeugen und dass jede Produktionseinheit genau eine bestimmte Sorte von Gütern erzeugt. Infolgedessen gibt es parallel zu den n Produktionseinheiten auch n unterschiedliche Sorten von Gütern, die im weiteren durch die Symbole $c_1, \dots, c_n$ bezeichnet werden. Die Produktionseinheit ω_i erzeugt also Güter der Sorte c_i.

[1] Wir stützen uns dabei in erster Linie auf Arbeiten von J. T. Schwartz (1961) und P. Straffa (1963).

[2] Das Wort ‘Gut’ soll sich im folgenden sowohl auf Sachgüter als auch auf Dienstleistungen beziehen. Die Begriffsbildung ist also sehr allgemein. Es soll jedoch vorausgesetzt werden, dass stets menschliche Arbeit erforderlich ist, um ein Gut zu produzieren.

2. Jede Produktionseinheit kann mehr oder weniger viele Güter der jeweils bestimmten Sorte erzeugen. Wie man das quantifizieren kann, hängt von der jeweiligen Gütersorte ab. Im allgemeinen wird man davon ausgehen können, dass es für jede Gütersorte eine eigene Maßeinheit gibt; z. B. kann man Kohle in Gewichtseinheiten und Strom in Kilowattstunden erfassen. Zur Notation verwenden wir die Symbole $x_1, \ldots, x_n$; durch x_i wird erfasst, wie viele Einheiten der Gütersorte c_i von der Produktionseinheit ω_i erzeugt werden. Dabei muss natürlich berücksichtigt werden, dass die Menge der produzierten Güter auch von der Zeitspanne abhängt, während der die Produktion erfasst wird. Für die weiteren Überlegungen wird deshalb eine bestimmte, für alle Produktionseinheiten gleiche Zeitspanne vorausgesetzt, z. B. ein Monat oder ein Jahr. Diese Zeitspanne wird im folgenden *Produktionsperiode* genannt. x_i ist also die Menge der Güter der Sorte c_i, die von der Produktionseinheit ω_i während der als gegeben vorausgesetzten Produktionsperiode erzeugt wird.

3. Jetzt kann man sich überlegen, wie viele Güter von allen Produktionseinheiten gemeinsam erzeugt werden. Dabei ist zu bedenken, dass man die Größen $x_1, \ldots, x_n$ nicht ohne weiteres addieren kann, denn jede dieser Größen hat eine besondere Maßeinheit. Man kann aber die gesamte Produktion durch einen Vektor

$$\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_n)'$$

repräsentieren.[3] Der Vektor $\mathbf{x}$ zeigt, wie viele Güter der unterschiedlichen Sorten von der Gesamtheit der Produktionseinheiten in der gegebenen Produktionsperiode erzeugt werden.

4. Wichtig ist nun folgende Überlegung: Für die Produktion von Gütern sind im allgemeinen nicht nur Arbeitsleistungen erforderlich, sondern auch wiederum andere Güter, sog. Vorleistungen. Ein Bäcker benötigt z. B. Mehl und einige andere Zutaten, um Brot herstellen zu können. Um das zu erfassen, wird folgende Notation verwendet: π_{ij} ist diejenige Menge der Gütersorte c_i, die von der Produktionseinheit ω_j benötigt wird, um eine Einheit der Gütersorte c_j zu produzieren. Diese Koeffizienten können nicht negativ, wohl aber Null sein; wenn $\pi_{ij} = 0$ ist, bedeutet das, dass zur Produktion der Gütersorte c_j keine Güter der Sorte c_i benötigt werden. Im allgemeinen kann auch $\pi_{ii} > 0$ sein. Außerdem ist klar, dass die Koeffizienten sich nicht nur im Zeitablauf verändern, sondern auch vom Produktionsniveau abhängig sein können. Zunächst soll jedoch angenommen werden, dass die Koeffizienten für einen gewissen Zeitraum als feste Größen gegeben sind. Außerdem wird angenommen, dass nur solche Güter als Vorleistungen erforderlich sind, die von den Produktionseinheiten $\omega_1, \ldots, \omega_n$ erzeugt werden. Unter diesen Voraussetzungen kann man

[3] In dieser Schreibweise handelt es sich um einen Spaltenvektor. Das Häckchen $'$ soll die Transposition symbolisieren.

sagen: Damit die Produktionseinheit ω_j die Menge x_j der Gütersorte c_j erzeugen kann, benötigt sie die Vorleistungen $\pi_{1j}x_j, \ldots, \pi_{nj}x_j$.

5. Jetzt kann zwischen Brutto- und Nettoproduktion unterschieden werden. Der Vektor $\mathbf{x}$ erfasst die Bruttoproduktion der Gesamtheit der Produktionseinheiten. Ein Teil dieser Bruttoproduktion muss jedoch in Gestalt von Vorleistungen verwendet werden, damit die Produktion überhaupt stattfinden kann.[4] Um das explizit sichtbar zu machen, ist es zweckmäßig, die Koeffizienten π_{ij} zu einer Matrix

$$\mathbf{\Pi} := \begin{bmatrix} \pi_{11} & \cdots & \pi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \pi_{n1} & \cdots & \pi_{nn} \end{bmatrix}$$

zusammenzufassen; sie wird im folgenden *Produktionsmatrix* genannt. Bildet man jetzt nämlich das Produkt

$$\mathbf{\Pi}\,\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} \pi_{1j}\, x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \pi_{nj}\, x_j \end{bmatrix}$$

zeigt die i-te Komponente dieses Vektors, welche Menge der Gütersorte c_i in Form von Vorleistungen für die Durchführung der gesamten Bruttoproduktion $\mathbf{x}$ erforderlich ist. Somit erhält man die Nettoproduktion durch den Vektor

$$\mathbf{y} := \mathbf{x} - \mathbf{\Pi}\,\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})\,\mathbf{x} \tag{6.1.1}$$

wobei $\mathbf{I}$ die Einheitsmatrix der Ordnung (n, n) bezeichnet.

6. Die Gleichung (6.1.1) zeigt, wie man – eine bestimmte Produktionsmatrix vorausgesetzt – aus der Bruttoproduktion die Nettoproduktion berechnen kann. Wenn sich die Matrix $(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})$ invertieren lässt, kann man auch umgekehrt berechnen, welche Bruttoproduktion erforderlich ist, um eine bestimmte Nettoproduktion zu erreichen, nämlich

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})^{-1}\,\mathbf{y} \tag{6.1.2}$$

Zu überlegen ist also, unter welchen Bedingungen die Matrix $(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})$ invertierbar ist. Allerdings genügt dies noch nicht, um zu ökonomisch sinnvollen Lösungen zu gelangen. Es muss außerdem sichergestellt sein, dass jeder nicht-negative Nettoproduktionsvektor $\mathbf{y}$ auch zu einem nicht-negativen Bruttoproduktionsvektor $\mathbf{x}$ führt, d.h. $(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})^{-1}$ muss in Gestalt einer nicht-negativen Matrix existieren.

[4] Damit Güter als Vorleistungen verwendet werden können, müssen sie natürlich bereits vorhanden sein. Im allgemeinen stammen sie deshalb aus der Bruttoproduktion, die in vorangegangenen Produktionsperioden stattgefunden hat. Für die folgenden Überlegungen wird jedoch von diesen zeitlichen Bezügen zunächst abgesehen.

6.1.2 Betrachtung eines Beispiels

1. Damit die Diskussion nicht zu abstrakt wird, betrachten wir ein kleines (fiktives) Beispiel. Es gibt vier Produktionseinheiten:

Nr. 1	produziert Holz
Nr. 2	produziert Stahl
Nr. 3	produziert Fahrzeuge
Nr. 4	produziert Getreide

Nr. 1 produziert 100 Einheiten Holz, Nr. 2 produziert 50 Einheiten Stahl, Nr. 3 produziert 10 Einheiten Fahrzeuge und Nr. 4 produziert 80 Einheiten Getreide. Der Bruttoproduktionsvektor ist also

$$\mathbf{x} \;=\; (100, 50, 10, 80)'$$

Folgende Matrix gibt die benötigten Vorleistungen an:

$$\mathbf{A} \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 40 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 10 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nr. 1 benötigt also für seine Holzproduktion 2 Einheiten Fahrzeuge, Nr. 2 benötigt 40 Einheiten Holz usw. Aus dieser Vorleistungsmatrix kann man jetzt die Produktionsmatrix $\mathbf{\Pi}$ berechnen, denn ihre Koeffizienten geben die benötigten Vorleistungen für jeweils eine Einheit der Bruttoproduktion an, also

$$\pi_{ij} \;=\; \frac{a_{ij}}{x_j}$$

Somit findet man die Produktionsmatrix

$$\mathbf{\Pi} \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0.8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0.125 \\ 0.02 & 0 & 0 & 0.025 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und die Matrix

$$(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi}) \;=\; \begin{bmatrix} 1 & -0.8 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -0.125 \\ -0.02 & 0 & 1 & -0.025 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multipliziert man diese Matrix von rechts mit dem Bruttoproduktionsvektor, findet man die Nettoproduktion:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})\,\mathbf{x} \;=\; \mathbf{y} \;=\; (40, 10, 6, 80)'$$

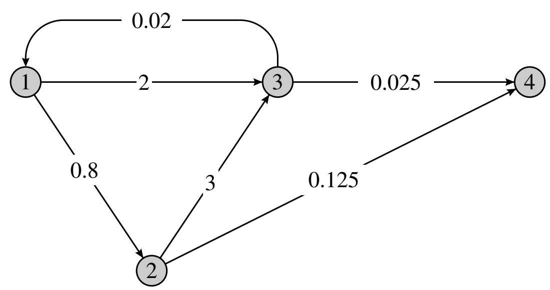


Abb. 6.1.1 Die Produktionsmatrix als gerichteter und bewerteter Graph.

Dies ist derjenige Teil der Bruttoproduktion, der nicht in Gestalt von Vorleistungen verwendet wird, sondern für den Endverbrauch übrig bleibt.

2. Die Produktionsmatrix $\mathbf{\Pi}$ kann als Adjazenzmatrix eines gerichteten und bewerteten Graphen aufgefasst werden. Abb. 6.1.1 zeigt, wie dieser Graph aussieht. Man erkennt auch, dass es zwei Komponenten gibt.[5] Die erste Komponente besteht aus den Knoten Nr. 1, Nr. 2 und Nr. 3, die zweite Komponente besteht nur aus dem Knoten Nr. 4. Den beiden Komponenten entsprechen die Adjazenzmatrizen

$$\mathbf{\Pi}_1 \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0.8 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0.02 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{\Pi}_2 \;=\; \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

3. Jetzt kann man sich mit der Frage beschäftigen, unter welchen Bedingungen die Inverse von $(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})$ existiert und nicht-negativ ist. Wie im Anhang A besprochen wird, besteht eine hinreichende Bedingung darin, dass jede Komponente von $\mathbf{\Pi}$ einen dominanten Eigenwert (Spektralradius) hat, der kleiner als 1 ist. Das kann auch folgendermaßen formuliert werden:

> Wenn die Produktionsmatrix einer Komponente nicht-negativ ist und wenn es außerdem einen nicht-negativen Nettoproduktionsvektor gibt, der mindestens ein positives Element hat, dann hat die Komponente einen dominanten Eigenwert (Spektralradius), der kleiner als 1 ist.

Man kann annehmen, dass diese Bedingungen normalerweise erfüllt sind, denn andernfalls würden die Produktionseinheiten einer Komponente ausschließlich für ihre eigene Produktion produzieren, ohne irgendeinen positiven Beitrag an ihre Umwelt abzugehen.

[5] Zum Begriff der Komponente bei gerichteten Graphen vgl. man Abschnitt 3.3.

4. Um zu zeigen, wie das eben angeführte Resultat zustande kommt, nehmen wir an, dass $\mathbf{\Pi}$ die Adjazenzmatrix einer Komponente ist.[6] Der Bruttoproduktionsvektor sei $\mathbf{x}$ und der Nettoproduktionsvektor sei $\mathbf{y}$, so dass folgende Gleichung gilt:

$$\mathbf{\Pi}\,\mathbf{x} + \mathbf{y} \;=\; \mathbf{x}$$

Wenn der Nettoproduktionsvektor nicht-negativ ist, folgt daraus $\mathbf{\Pi x} \leq \mathbf{x}$, und wenn $\mathbf{y}$ mindestens einen positiven Koeffizienten hat, folgt auch

$$\mathbf{\Pi}\,\mathbf{x} \;\lessdot\; \mathbf{x} \tag{6.1.3}$$

(Das Symbol $\lessdot$ soll bedeuten, dass für alle Koeffizienten $\leq$ und für mindestens einen Koeffizienten $<$ gilt.) Da nach Voraussetzung $\mathbf{\Pi}$ die Adjazenzmatrix einer Komponente ist, ist $\mathbf{\Pi}$ eine unzerlegbare Matrix und außerdem nicht-negativ. Also gibt es nach dem Satz von Frobenius (der im Anhang A besprochen wird) einen dominanten Eigenwert $\mathrm{dom}(\mathbf{\Pi}) > 0$ mit einem ebenfalls positiven Eigenvektor. Das gleiche gilt nun aber auch für die transponierte Matrix $\mathbf{\Pi}'$, denn $\mathbf{\Pi}'$ erfüllt ebenfalls die Voraussetzungen des Satzes von Frobenius, und außerdem haben $\mathbf{\Pi}$ und $\mathbf{\Pi}'$ die gleichen Eigenwerte. Insbesondere haben sie den gleichen dominanten Eigenwert $\lambda^* := \mathrm{dom}(\mathbf{\Pi}) = \mathrm{dom}(\mathbf{\Pi}')$. Jetzt sei $\mathbf{w}$ der zum dominanten Eigenwert von $\mathbf{\Pi}'$ gehörige positive Eigenvektor von $\mathbf{\Pi}'$. Also ist $\mathbf{\Pi}'\mathbf{w} = \lambda^*\mathbf{w}$ bzw. $\mathbf{w}'\mathbf{\Pi} = \lambda^*\mathbf{w}'$. Multipliziert man nun die Gleichung (6.1.3) auf beiden Seiten von links mit $\mathbf{w}'$, folgt

$$\mathbf{w}'\mathbf{\Pi}\,\mathbf{x} \;<\; \mathbf{w}'\mathbf{x}$$

denn $\mathbf{w}$ ist in allen Koeffizienten positiv. Ersetzt man auf der linken Seite $\mathbf{w}'\mathbf{\Pi}$ durch $\lambda^*\mathbf{w}'$, folgt schließlich $\lambda^*\mathbf{w}'\mathbf{x} < \mathbf{w}'\mathbf{x}$, woraus man erkennt, dass λ^* kleiner als 1 sein muss.

5. In unserem Beispiel ist die oben angeführte Bedingung sicherlich erfüllt, denn wie zu Beginn berechnet worden ist, gibt es bei jeder Produktionseinheit eine positive Nettoproduktion.[7] $(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})$ lässt sich also invertieren, und die Inverse ist nicht-negativ. Box 6.1.1 zeigt ein Skript, mit dem die Berechnung durchgeführt werden kann. Die untere Hälfte der Box zeigt die Koeffizienten der inversen Matrix. Wie im vorangegangenen Abschnitt besprochen worden ist, kann diese Matrix verwendet werden, um für jeden beliebig vorgegebenen Nettoproduktionsvektor zu berechnen, welche Bruttoproduktion von jeder Produktionseinheit erbracht werden muss.

[6] Wie unser Beispiel gezeigt hat, muss dies nicht unbedingt die Produktionsmatrix der gesamten Ökonomie sein. Wir verzichten in diesem Paragraphen auf eine Indizierung der Komponenten, um die Notation übersichtlicher zu machen.

[7] Der dominante Eigenwert ist in diesem Beispiel 0.4; wie man Eigenwerte und Eigenvektoren praktisch berechnen kann, wird im Anhang A.4 besprochen.

Box 6.1.1 Skript zur Berechnung von $(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})^{-1}$.

```
mdef(Pi,4,4) =                  # Definition der Matrix Pi
    0.0,  0.8, 2.0, 0.0,
    0.0,  0.0, 3.0, 0.125,
    0.02, 0.0, 0.0, 0.025,
    0.0,  0.0, 0.0, 0.0;
mdefi(4,4,I);                   # Definition einer Einheitsmatrix
mexpr(I - Pi,IPi);              # IPi = I - Pi
mginv(IPi,INV);                 # INV = Inverse von IPi
mpr(INV);                       # Ausdruck von INV

Die Koeffizienten der inversen Matrix:

1.0965   0.8772   4.8246   0.2303
0.0658   1.0526   3.2895   0.2138
0.0219   0.0175   1.0965   0.0296
0.0000   0.0000   0.0000   1.0000
```

6.1.3 Direkte und indirekte Vorleistungen

1. π_{ij} erfasst die Vorleistungen der Gütersorte i, die zur Produktion einer Einheit der Gütersorte j eingesetzt werden. Dies sind die *direkt* eingesetzten Vorleistungen. Um sie zu produzieren, werden wiederum Vorleistungen eingesetzt usw; dies sind die *indirekt* eingesetzten Vorleistungen. Diese Überlegung führt zwar schrittweise in die Vergangenheit und kann deshalb mit einer Produktionsmatrix, die sich auf eine (historisch) bestimmte Produktionsperiode bezieht, nicht nachvollzogen werden. Wohl aber lässt sich eine hypothetische Fragestellung verfolgen: Wieviele Vorleistungen würden direkt und indirekt eingesetzt, wenn die Produktion für einen längeren Zeitraum auf der Grundlage der gegebenen Produktionsmatrix erfolgen würde?

2. Um eine Antwort zu finden, werden folgende Notationen verwendet:

$\pi_{ij}^{(1)} := \pi_{ij}$ sind die direkten Vorleistungen,

$\pi_{ij}^{(2)} := \sum_{l=1}^{n} \pi_{il}^{(1)} \pi_{lj}$ sind die auf der zweiten Stufe eingesetzten indirekten Vorleistungen, und

$\pi_{ij}^{(k)} := \sum_{l=1}^{n} \pi_{il}^{(k-1)} \pi_{lj}$ sind die auf der k-ten Stufe eingesetzten indirekten Vorleistungen.

Somit liefert die Definition

$$\bar{\pi}_{ij} \;:=\; \sum_{k=1}^{\infty} \pi_{ij}^{(k)}$$

die insgesamt direkt und indirekt eingesetzten Vorleistungen. Fasst man die Koeffizienten $\bar{\pi}_{ij}$ zu einer Matrix $\bar{\mathbf{\Pi}}$ zusammen, kann man auch schreiben:

$$\bar{\mathbf{\Pi}} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{\Pi}^k \tag{6.1.4}$$

3. Zu überlegen ist, wie die Matrix $\bar{\mathbf{\Pi}}$ berechnet werden kann. Dazu knüpfen wir an ein Ergebnis an, das im Anhang A.1 besprochen wird: Wenn der dominante Eigenwert von $\mathbf{\Pi}$ kleiner als 1 ist, dann ist $(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})$ invertierbar und außerdem gilt für die Inverse folgende Reihendarstellung:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{\Pi}^k$$

Nimmt man die Voraussetzungen für die Invertierbarkeit als gegeben an (vgl. den vorangegangenen Abschnitt), kann man also folgende Gleichung bilden:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{\Pi}^k = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{\Pi}^k = \mathbf{I} + \bar{\mathbf{\Pi}}$$

woraus folgt:

$$\bar{\mathbf{\Pi}} = (\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})^{-1} - \mathbf{I} \tag{6.1.5}$$

Die Aufgabe besteht also im wesentlichen wiederum nur darin, die Matrix $(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})$ zu invertieren.

4. Für das im vorangegangenen Abschnitt behandelte Beispiel wurde bereits in Box 6.1.1 gezeigt, wie die Matrix $(\mathbf{I}-\mathbf{\Pi})^{-1}$ berechnet werden kann. Zieht man in der Hauptdiagonalen jeweils den Wert 1 ab, erhält man

$$\bar{\mathbf{\Pi}} = \begin{bmatrix} 0.0965 & 0.8772 & 4.8246 & 0.2303 \\ 0.0658 & 0.0526 & 3.2895 & 0.2138 \\ 0.0219 & 0.0175 & 0.0965 & 0.0296 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

Als Beispiel betrachten wir die Produktionseinheit Nr. 2 (Stahl). Um eine Einheit Stahl zu produzieren sind 0.8 Einheiten Holz als direkte Vorleistung erforderlich; die direkten und indirekten Vorleistungen betragen dagegen $\bar{\pi}_{12} = 0.8772$. Bezieht man diese Werte auf die Bruttoproduktion in Höhe von 50 Einheiten Stahl, betragen die direkten Vorleistungen 40, die direkten und indirekten Vorleistungen etwa 44 Einheiten Holz.

6.1.4 Ausrüstungen und Lagerhaltung

1. Bisher haben wir nur Vorleistungen berücksichtigt, die während einer Produktionsperiode zur Produktion neuer Güter verbraucht werden. Darüber hinaus sind fast immer Ausrüstungen erforderlich, z.B. Gebäude und Maschinen, und außerdem bedarf es einer mehr oder weniger umfangreichen Lagerhaltung, damit eine kontinuierliche Produktion möglich ist. Wir erweitern deshalb das anfängliche Modell und unterscheiden:

> π_{ij} ist die Menge des Gutes c_i, die zur Produktion einer Einheit des Gutes c_j in Gestalt von Vorleistungen eingesetzt werden muss; und
>
> ϕ_{ij} ist die Menge des Gutes c_i, die zur Produktion einer Einheit des Gutes c_j in Gestalt von Ausrüstungen oder Lagerhaltung kontinuierlich vorhanden sein muss.

Wie bisher beziehen wir uns auf n Produktionseinheiten, die jeweils eine Gütersorte produzieren. Die Koeffizienten π_{ij} werden zu einer Matrix $\mathbf{\Pi} = (\pi_{ij})$, die Koeffizienten ϕ_{ij} zu einer Matrix $\mathbf{\Phi} = (\phi_{ij})$ zusammengefasst. In der Literatur wird $\mathbf{\Phi}$ oft als *Matrix des fixen Kapitals* bezeichnet.

2. Sowohl π_{ij} als auch ϕ_{ij} können in physischen Mengeneinheiten erfasst werden: Die Koeffizienten π_{ij} erfassen *Stromgrößen*, eine Menge von Gütern, die während einer bestimmten Produktionsperiode in Gestalt von Vorleistungen verbraucht werden; dagegen erfassen die Koeffizienten ϕ_{ij} *Bestandsgrößen*, also Mengen von Gütern, die kontinuierlich vorhanden sein müssen, z.B. in Gestalt eines Gebäudes, einer Maschine oder eines bestimmten Lagerbestands. Natürlich werden auch die Elemente des fixen Kapitals in der Produktion verbraucht, aber in einer anderen Art als Vorleistungen. Eine Maschine wird benutzt und erleidet dadurch einen gewissen Verschleiß; um die Maschine funktionstüchtig zu erhalten, müssen also wiederum bestimmte Güter eingesetzt werden. Ebenso bei einem Vorratslager. Die aus dem Lager für die laufende Produktion entnommenen Güter müssen durch neue Güter ersetzt werden, damit das Lager erhalten bleibt und seine Aufgabe erfüllen kann. Somit stellt sich die Frage, wie die erforderliche Erneuerung des fixen Kapitals im Rahmen des Modells behandelt werden soll. Dafür gibt es unterschiedliche Möglichkeiten. Eine sehr einfache Idee, der wir hier folgen wollen, besteht darin, die Güter, die zur Erhaltung des fixen Kapitals erforderlich sind, als Bestandteile der Vorleistungen zu betrachten. π_{ij} soll also sowohl die in der laufenden Produktion in Gestalt von Vorleistungen verbrauchten Güter erfassen als auch die Güter, die zur Aufrechterhaltung von ϕ_{ij} erforderlich sind.

3. Infolgedessen verlaufen auch alle Überlegungen zur Brutto- und Nettoproduktion so, wie dies in Abschnitt 6.1.1 bereits dargestellt wurde. $\mathbf{\Pi}\,\mathbf{x}$ erfasst die gesamten Vorleistungen, einschließlich der für die Reproduktion des fixen Kapitals erforderlichen Güter, die für die Bruttoproduktion

$\mathbf{x}$ eingesetzt werden. Für die Nettoproduktion erhält man somit wie bisher die Gleichung $\mathbf{y} = (\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})\mathbf{x}$. Hinzu kommt der Vektor $\mathbf{\Phi x}$, dessen Koeffizienten angeben, wie viele Güter der jeweiligen Sorte in der gesamten Ökonomie in Gestalt von fixem Kapital gehalten werden müssen, um die Bruttoproduktion $\mathbf{x}$ zu ermöglichen. Er spielt jedoch bei der Betrachtung der Güterströme keine explizite Rolle, da die Reproduktion von $\mathbf{\Phi}$ durch $\mathbf{\Pi}$ erfasst wird. Wichtig wird die Matrix $\mathbf{\Phi}$ erst bei kapitalistischen Bewertungen der Produktion (Abschnitt 6.2.2).

6.2 Bewertungen

In dem bisher besprochenen Modell gibt es nur Güter; einerseits Güterströme, andererseits Güterbestände. In den folgenden Abschnitten beschäftigen wir uns mit möglichen Bewertungen, so dass man davon sprechen kann, dass Güter einen „Wert“ haben, durch den sie vergleichbar gemacht werden können. Schon an dieser Stelle sei betont, dass es sich bei diesen Bewertungen nicht um Marktpreise handelt, sondern um Größen, die im Rahmen eines Modells konstruiert werden. Mit Marktpreisen beschäftigen wir uns erst im nächsten Kapitel.

6.2.1 Berechnung von Arbeitswerten

1. Ein klassischer Ansatz zur Konstruktion von Bewertungen nimmt darauf Bezug, dass zur Produktion aller Güter menschliche Arbeit erforderlich ist. Die Idee besteht darin, den Wert eines Gutes durch die Gesamtmenge an Arbeit zu bestimmen, die für seine Produktion eingesetzt wird. Dabei wird die Menge an Arbeit z.B. in Arbeitsstunden erfasst. Man spricht dann von *Arbeitswerten*. Bei der Berechnung ist zu berücksichtigen, dass die zur Produktion erforderlichen Vorleistungen ebenfalls einen Arbeitswert haben. Somit geht es darum, den direkt und indirekt eingesetzten Arbeitsaufwand zu berechnen.

2. Wie bisher beziehen wir uns auf eine Produktionsmatrix $\mathbf{\Pi}$ für n Produktionseinheiten. Durch w_j soll erfasst werden, wie viele Arbeitsstunden im Produktionsbereich j aufgewendet werden, um eine Einheit des j-ten Gutes zu produzieren. Die Arbeitsstunden, die insgesamt – direkt und indirekt – für die Produktion einer Einheit erforderlich sind, werden in Analogie zur bisherigen Notation mit $\bar{w}_j$ bezeichnet. $\bar{w}_j$ ist also der Arbeitswert einer Einheit des j-ten Gutes. Die Berechnung erfolgt mit folgendem Ansatz:

$$\bar{w}_j = w_j + \sum_{i=1}^{n} \bar{w}_i \, \pi_{ij}$$

Die Gleichung macht deutlich, woraus sich der Arbeitswert zusammensetzt: einerseits aus dem direkten Arbeitsaufwand w_j und andererseits aus den Arbeitswerten der Vorleistungen. Zur Berechnung werden die Vektoren

$$\mathbf{w} := (w_1, \ldots, w_n)' \qquad \text{und} \qquad \bar{\mathbf{w}} := (\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_n)'$$

definiert. Dann kann man folgende Matrizengleichung bilden:

$$\bar{\mathbf{w}}' = \mathbf{w}' + \bar{\mathbf{w}}'\mathbf{\Pi}$$

Eine einfache Umformung liefert $\bar{\mathbf{w}}'(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi}) = \mathbf{w}'$, und wenn $(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})$ invertierbar ist, erhält man daraus die Lösung

$$\bar{\mathbf{w}}' = \mathbf{w}'(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})^{-1} \tag{6.2.1}$$

Wiederum zeigt sich, dass die Matrix $(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})$ eine wichtige Rolle spielt. Ihre Invertierbarkeit soll im folgenden vorausgesetzt werden.

3. Zur Illustration verwenden wir das im vorangegangenen Abschnitt besprochene Beispiel. Es wird angenommen, dass der direkt erforderliche Arbeitsaufwand durch den Vektor

$$\mathbf{w} = (2, 4, 50, 10)'$$

gegeben ist. Box 6.2.1 zeigt ein Skript zur Berechnung der Arbeitswerte. Als Ergebnis erhält man den Vektor

$$\bar{\mathbf{w}} = (3.55, 6.84, 77.63, 12.80)'$$

mit den Arbeitswerten. Z.B. beträgt der Arbeitswert einer Einheit Getreide 12.8 Arbeitsstunden.

4. Man könnte auf den Gedanken kommen, dass es unterschiedliche Sorten von Arbeit gibt, deren Verausgabung pro Arbeitsstunde unterschiedlich viel „Wert“ erzeugt. Für eine solche Annahme gibt es zwar keine objektivierbaren Kriterien; aber die zuvor skizzierte Überlegung könnte auch

Box 6.2.1 Skript zur Berechnung von Arbeitswerten.

```
mdef(Pi,4,4) =                    # Definition der Matrix Pi
    0.0,  0.8, 2.0, 0.0,
    0.0,  0.0, 3.0, 0.125,
    0.02, 0.0, 0.0, 0.025,
    0.0,  0.0, 0.0, 0.0;
mdefi(4,4,I);                     # Definition einer Einheitsmatrix
mexpr(I - Pi,IPi);                # IPi = I - Pi
mginv(IPi,INV);                   # INV = Inverse von IPi
mdef(W,1,4) = 2,4,50,10;          # Definition des Vektors W
mmul(W,INV,WB);                   # WB = W * INV
mpr(WB);                          # Ausdruck von WB
```

auf der Grundlage einer solchen Annahme durchgeführt werden. Angenommen nämlich, dass man q Sorten von Arbeit unterscheiden möchte. Dann kann man für $k = 1, \ldots, q$ definieren: w_{kj} ist die direkt und $\bar{w}_{kj}$ ist die direkt und indirekt für die Produktion einer Einheit des j-ten Gutes aufgewendete Arbeit der k-ten Sorte. Dann erhält man mit vollständig parallelen Rechnungen einen Vektor

$$(\bar{w}_{1j}, \ldots, \bar{w}_{qj})$$

der zeigt, wie viel Arbeit der verschiedenen Sorten für die Produktion einer Einheit der j-ten Gütersorte aufgewendet wird. Es bleibt dann nur die Frage, wie man aus den Koeffizienten dieses Vektors einen „gesamten Arbeitswert" bilden kann, denn das Ergebnis hängt offenbar davon ab, wie man die „wertbildende Kraft" der verschiedenen Arbeitssorten definieren möchte.

6.2.2 Kapitalistische Preise

1. In einer kapitalistischen Ökonomie wird normalerweise nicht mit Arbeitswerten gerechnet, sondern Bewertungen orientieren sich an einem Vergleich von Kosten und Erträgen. Bewertungen, die sich dieser Idee verdanken, werden wir in diesem Abschnitt 'Preise' nennen. Sie sollten jedoch nicht mit Marktpreisen verwechselt werden, denn die Preise, mit denen wir uns in diesem Abschnitt beschäftigen, werden im Rahmen eines Modells konstruiert, um ein Denken in Kosten und Erträgen zu ermöglichen. Oder anders formuliert: Preise werden als Rechengrößen betrachtet, die sich ein Modellkonstrukteur ausdenkt (im Unterschied zu Marktpreisen, die sich die Teilnehmer an einem Marktprozess ausdenken bzw. aushandeln).

2. Wir verwenden folgende Notation: p_i ist der Preis einer Einheit der i-ten Gütersorte, und p_0 ist der Lohnsatz, d.h. der Preis für eine Arbeitsstunde. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass es für alle Arten von Arbeit den gleichen Lohnsatz gibt. Somit kann man von den Kosten sprechen, die bei der Produktion einer Einheit des j-ten Gutes auftreten:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \, \pi_{ij} + p_0 \, w_j$$

und natürlich auch von einem Ertrag, nämlich p_j minus diese Kosten.

3. Ersichtlich hängt der Ertrag auch vom Lohnsatz ab. Andererseits ist aber auch klar, dass sich an den relativen Bewertungen nichts verändern würde, wenn man sowohl die Preise als auch den Lohnsatz mit dem gleichen Faktor multipliziert. Es ist deshalb möglich (und für einige Berechnungen zweckmäßig), die Preise in Lohneinheiten auszudrücken, d.h. mit Preisen

$$\tilde{p}_j := \frac{p_j}{p_0}$$

zu rechnen. Sie lassen sich auch unmittelbar interpretieren. Ist z.B. $\tilde{p}_j = 2$, bedeutet dies, dass der Preis einer Einheit des j-ten Gutes gleich dem Lohn von zwei Arbeitsstunden ist. Fasst man diese Preise zu einem Vektor

$$\tilde{\mathbf{p}} := (\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_n)'$$

zusammen, kann man sich auf die Kosten je einer Einheit der verschiedenen Gütersorten durch den Ausdruck

$$\tilde{\mathbf{p}}'\boldsymbol{\Pi} + \mathbf{w}'$$

beziehen, und die Gesamtkosten für eine Bruttoproduktion $\mathbf{x}$ sind durch $\tilde{\mathbf{p}}'\boldsymbol{\Pi}\,\mathbf{x} + \mathbf{w}'\mathbf{x}$ gegeben.

4. Aber was ist der Ertrag? Aus der Sicht der Arbeitskräfte besteht der Ertrag in der Menge der Güter, die sie sich für ihren Lohn kaufen können. Die kapitalistische Kosten-Ertrags-Rechnung geht jedoch von einer anderen Betrachtungsweise aus: Es wird Kapital eingesetzt, um einen Ertrag zu erzielen. Also muss überlegt werden, wie das eingesetzte Kapital zu bestimmen ist. Dafür beziehen wir uns auf die in Abschnitt 6.1.4 besprochene Idee, dass zur Durchführung der Produktion bei jeder Produktionseinheit ein bestimmtes fixes Kapital als Bestandsgröße vorhanden sein muss. Übernimmt man die dort eingeführte Notation, besteht das fixe Kapital, das bei der j-ten Produktionseinheit für eine Outputeinheit erforderlich ist, aus dem Vektor

$$(\phi_{1j}, \ldots, \phi_{nj})'$$

und somit bestehen die kapitalistisch berechneten Kosten für die Produktion einer Outputeinheit aus der Preisgröße

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \, \phi_{ij}$$

Dies ist das pro Outputeinheit eingesetzte Kapital, auf das sich auch eine Beurteilung der Erträge bezieht. Zur Beurteilung dient eine *Profitrate* ρ, die folgendermaßen definiert ist:

$$\rho = \frac{\text{Ertrag pro Outputeinheit}}{\text{Kosten pro Outputeinheit}}$$

Somit ist der Ertrag pro Outputeinheit, der in der j-ten Produktionseinheit erzielt wird, durch die Größe

$$\rho \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \, \phi_{ij}$$

definiert. Dabei wird vorausgesetzt, dass es bei allen Produktionseinheiten die gleiche Profitrate ρ gibt.

5. Jetzt kann der Gedankengang zusammengefasst werden, zunächst wieder für die j-te Produktionseinheit. Ihre Kosten-Ertrags-Rechnung erscheint in folgender Gleichung:

$$\tilde{p}_j = \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \, \pi_{ij} + w_j + \rho \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \, \phi_{ij}$$

Auf der linken Seite steht der Gesamterlös aus einer Outputeinheit, auf der rechten Seite geben die ersten beiden Summanden die effektiven Produktionskosten an, und der dritte Summand drückt den kapitalistisch konzipierten Ertrag aus. Mithilfe der Matrixnotation erhält man also folgendes Gleichungssystem als Ausgangspunkt für eine Konstruktion kapitalistischer Preise:

$$\tilde{\mathbf{p}}' = \tilde{\mathbf{p}}'\mathbf{\Pi} + \mathbf{w}' + \rho \, \tilde{\mathbf{p}}'\mathbf{\Phi} \tag{6.2.2}$$

Zu überlegen ist, für welche Profitraten ρ diese Preisgleichung eine Lösung hat, wobei natürlich vorausgesetzt werden soll, dass nur nicht-negative Preisvektoren $\tilde{\mathbf{p}}$ zulässig sind.

6. Zunächst kann man sich überlegen, dass es eine maximale Profitrate ρ^* gibt, die nicht überschritten werden kann, ohne die Voraussetzung nicht-negativer Preise zu verletzen. Der Gedankengang verläuft folgendermaßen. Aus (6.2.2) gewinnt man die Darstellung

$$\tilde{\mathbf{p}}'(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi} - \rho \, \mathbf{\Phi}) = \mathbf{w}'$$

und wenn $(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi} - \rho \, \mathbf{\Phi})$ invertierbar ist, folgt daraus die Darstellung

$$\tilde{\mathbf{p}}' = \mathbf{w}'(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi} - \rho \, \mathbf{\Phi})^{-1} \tag{6.2.3}$$

Wie schon mehrfach besprochen worden ist, besteht eine hinreichende Bedingung für die Invertierbarkeit darin, dass $\mathrm{dom}(\mathbf{\Pi} + \rho \, \mathbf{\Phi}) < 1$ ist.[8] Da wir voraussetzen, dass es sich um eine produktive Ökonomie handelt, gilt dies sicherlich dann, wenn $\rho = 0$ ist, also keinerlei Profite erzielt werden. Nun ist jedoch der dominante Eigenwert einer nicht-negativen Matrix eine stetige streng monoton steigende Funktion ihrer Koeffizienten.[9] Wenn man also ρ ausgehend von Null kontinuierlich vergrößert, wird auch der dominante Eigenwert von $(\mathbf{\Pi} + \rho \, \mathbf{\Phi})$ kontinuierlich größer, bis er schließlich den Wert 1 erreicht, bei dem die Matrix nicht mehr invertierbar ist. So kommt man zu dem Ergebnis, dass es eine maximale Profitrate ρ^* gibt, so dass für

[8] Dann ist auch $(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi} - \rho \, \mathbf{\Phi})^{-1}$ eine nicht-negative Matrix und somit gewährleistet, dass $\tilde{p}$ ein nicht-negativer Vektor ist.

[9] Dies gilt zunächst unter der Voraussetzung, dass die Matrix unzerlegbar ist; vgl. Schwartz (1961, S. 24 f.). Das Ergebnis lässt sich jedoch für blockdiagonale Matrizen verallgemeinern; man vgl. dazu die Ausführungen im Anhang A.

alle Profitraten $0 \leq \rho < \rho^*$ die Matrix $(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi} - \rho \, \mathbf{\Phi})$ invertierbar und ihre Inverse nicht-negativ ist. Für diesen Bereich möglicher Profitraten zeigt dann (6.2.3), wie die Preise eine Funktion der Profitrate sind.

7. Die maximale Profitrate ρ^* bildet einen Grenzfall. In diesem Fall ist $\mathrm{dom}(\mathbf{\Pi} + \rho^* \, \mathbf{\Phi}) = 1$. Zwar ist $(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi} - \rho^* \, \mathbf{\Phi})$ nicht mehr invertierbar, aber trotzdem folgt aus dem Satz von Frobenius (vgl. Anhang A), dass es einen zugehörigen nicht-negativen Eigenvektor (wir nennen ihn $\mathbf{v}^*$) gibt, so dass gilt:

$$(\mathbf{\Pi} + \rho^* \, \mathbf{\Phi}) \, \mathbf{v}^* = \mathbf{v}^*$$

Wenn $\mathbf{\Pi}$ eine unzerlegbare Matrix ist, ist auch $(\mathbf{\Pi} + \rho^* \, \mathbf{\Phi})$ eine unzerlegbare Matrix; und dann ist $\mathbf{v}^*$ sogar ein positiver Vektor. Im allgemeinen Fall ist das zwar nicht gewährleistet, $\mathbf{v}^*$ ist aber sicherlich nicht-negativ und hat mindestens einen positiven Koeffizienten.

8. Um den Zusammenhang zwischen der Profitrate und dem Lohnsatz deutlich zu machen, ist es zweckmäßig, nicht die Preise $\tilde{\mathbf{p}}$ zu verwenden, sondern explizit zwischen den Preisen $\mathbf{p}$ und dem Lohnsatz p_0 zu unterscheiden. Die Gleichung (6.2.2) kann dann folgendermaßen geschrieben werden:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}'\mathbf{\Pi} + p_0 \mathbf{w}' + \rho \, \mathbf{p}'\mathbf{\Phi} \tag{6.2.4}$$

und daraus gewinnt man

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}'(\mathbf{\Pi} + \rho \, \mathbf{\Phi}) + p_0 \mathbf{w}' \tag{6.2.5}$$

Nun hat jedoch die vorangehende Überlegung gezeigt, dass die maximale Profitrate ρ^* genau dann erreicht wird, wenn der dominante Eigenwert von $(\mathbf{\Pi} + \rho \, \mathbf{\Phi})$ gleich 1 ist. Außerdem existiert dann ein nicht-negativer Eigenvektor $\mathbf{v}^*$ mit mindestens einer positiven Komponente. Multipliziert man die Gleichung (6.2.5) von rechts mit diesem Vektor, erhält man

$$\mathbf{p}'\mathbf{v}^* = \mathbf{p}'(\mathbf{\Pi} + \rho \, \mathbf{\Phi}) \, \mathbf{v}^* + p_0 \mathbf{w}'\mathbf{v}^* = \mathbf{p}'\mathbf{v}^* + p_0 \mathbf{w}'\mathbf{v}^*$$

Daraus folgt $p_0 \mathbf{w}'\mathbf{v}^* = 0$, und da $\mathbf{w}$ ein Vektor ist, in dem alle Koeffizienten positiv sind, folgt daraus $p_0 = 0$. So erkennt man: Die maximale Profitrate wird genau dann erreicht, wenn der Lohnsatz Null ist.

9. Eine weitere Überlegung zeigt, dass die Profitrate eine monoton fallende Funktion des Lohnsatzes ist. Denn durch eine einfache Umformung gewinnt man aus Gleichung (6.2.4) die Gleichung

$$\rho \, \mathbf{p}'\mathbf{\Phi} = \mathbf{p}'(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi}) - p_0 \mathbf{w}'$$

Multipliziert man diese Gleichung von rechts mit einem Bruttoproduktionsvektor $\mathbf{x}$, erhält man

$$\rho \, \mathbf{p}'\mathbf{\Phi} \, \mathbf{x} = \mathbf{p}'(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi}) \, \mathbf{x} - p_0 \mathbf{w}'\mathbf{x}$$

und daraus folgende Darstellung für die Profitrate:

$$\rho = \frac{\mathbf{p}'(\mathbf{I}-\mathbf{\Pi})\,\mathbf{x} - p_0\mathbf{w}'\mathbf{x}}{\mathbf{p}'\mathbf{\Phi}\,\mathbf{x}} \tag{6.2.6}$$

So erkennt man, dass die Profitrate ρ kleiner wird, wenn der Lohnsatz p_0 größer wird.[10] Wenn der Lohnsatz seinen maximal möglichen Wert annimmt, wird die Profitrate Null. Dann erhält man aus der Gleichung (6.2.2) die Darstellung

$$\tilde{\mathbf{p}}' = \tilde{\mathbf{p}}'\mathbf{\Pi} + \mathbf{w}' \qquad \text{bzw.} \qquad \tilde{\mathbf{p}}'(\mathbf{I}-\mathbf{\Pi}) = \mathbf{w}' \tag{6.2.7}$$

und daraus folgt $\tilde{\mathbf{p}}' = \mathbf{w}'(\mathbf{I}-\mathbf{\Pi})^{-1}$. Wie im vorangegangenen Abschnitt gezeigt wurde, ist dann $\tilde{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{w}}$ (man vgl. (6.2.1)), d.h. die Preise sind mit den Arbeitswerten identisch.

10. Zu überlegen bleibt, wie sich die maximale Profitrate ρ^* berechnen lässt. Da sie dann erreicht wird, wenn der Lohnsatz Null ist, bildet Gleichung (6.2.4) einen geeigneten Ausgangspunkt. Ist nämlich $p_0 = 0$, folgt aus ihr die Gleichung

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}'\mathbf{\Pi} + \rho^*\,\mathbf{p}'\mathbf{\Phi} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathbf{p}'(\mathbf{I}-\mathbf{\Pi}) = \rho^*\,\mathbf{p}'\mathbf{\Phi}$$

Da $(\mathbf{I}-\mathbf{\Pi})$ nach Voraussetzung invertierbar ist, folgt daraus auch die Gleichung

$$\mathbf{p}' = \rho^*\,\mathbf{p}'\mathbf{\Phi}\,(\mathbf{I}-\mathbf{\Pi})^{-1} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{1}{\rho^*}\,\mathbf{p}' = \mathbf{p}'\mathbf{\Phi}\,(\mathbf{I}-\mathbf{\Pi})^{-1}$$

Sie zeigt, dass $1/\rho^*$ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{\Phi}\,(\mathbf{I}-\mathbf{\Pi})^{-1}$ bzw. ihrer Transponierten $(\mathbf{\Phi}\,(\mathbf{I}-\mathbf{\Pi})^{-1})'$ sein muss, der außerdem die Eigenschaft hat, dass der zugehörige Eigenvektor nicht negativ ist. Wenn $\mathbf{\Pi}$ eine unzerlegbare Matrix ist, ist $(\mathbf{I}-\mathbf{\Pi})^{-1}$ eine positive Matrix. Wenn auch $\mathbf{\Phi}$ unzerlegbar ist, ist somit auch $(\mathbf{\Phi}\,(\mathbf{I}-\mathbf{\Pi})^{-1})'$ eine unzerlegbare Matrix. In diesem Fall ist der dominante Eigenwert von $(\mathbf{\Phi}\,(\mathbf{I}-\mathbf{\Pi})^{-1})'$ der einzige Eigenwert, dem ein nicht-negativer (in diesem Fall sogar ein positiver) Eigenvektor entspricht.[11] Somit gelangt man in diesem Fall zu der Schlußfolgerung

$$\frac{1}{\rho^*} = \mathrm{dom}(\mathbf{\Phi}\,(\mathbf{I}-\mathbf{\Pi})^{-1}) \tag{6.2.8}$$

Dagegen kann im allgemeinen Fall zerlegbarer Matrizen nicht von vornherein ausgeschlossen, dass es mehrere Lösungen gibt.

[10] Auf den ersten Blick suggeriert die Gleichung, dass es einen linearen Zusammenhang zwischen Lohnsatz und Profitrate gibt. Das ist jedoch im allgemeinen nicht der Fall, da auch die Preise $\mathbf{p}$ eine Funktion der Lohnsätze bzw. der Profitrate sind.

[11] Man vgl. Gantmacher (1971, S. 56).

6.2.3 Fortsetzung des Beispiels

1. Zur Illustration der Ausführungen des vorangegangenen Abschnitts verwenden wir das in Abschnitt 6.1.2 eingeführte und in Abschnitt 6.2.1 ergänzte Beispiel. Für die weiteren Berechnungen wird folgende Matrix des fixen Kapitals angenommen:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 & 1.5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0.08 \\ 0.01 & 0.2 & 0 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zunächst kann versucht werden, die maximale Profitrate ρ^* zu bestimmen. Zu diesem Zweck wird die Matrix $(\mathbf{\Phi}\,(\mathbf{I}-\mathbf{\Pi})^{-1})'$ gebildet und werden ihre Eigenwerte berechnet. Box 6.2.2 zeigt das Skript. In diesem Beispiel sind alle Eigenwerte und Eigenvektoren reell, und man erkennt, dass nur der dominante Eigenwert positiv ist und einen nicht-negativen Eigenvektor hat. Somit ist

$$\mathrm{dom}(\mathbf{\Phi}\,(\mathbf{I}-\mathbf{\Pi})^{-1}) = 1.2403 \qquad \text{und} \qquad \rho^* = \frac{1}{1.2403} = 0.806$$

2. Jetzt können mithilfe der Gleichung (6.2.2) Preise berechnet werden. Die erforderlichen Arbeitsleistungen sind (wie in Abschnitt 6.2.1) durch den Vektor

$$\mathbf{w} = (2, 4, 50, 10)'$$

gegeben. Also kann man mithilfe von (6.2.2) für jede beliebige Profitrate $0 \le \rho < \rho^*$ die korrespondierenden Preise berechnen. Folgende Tabelle zeigt die Rechenergebnisse für fünf unterschiedliche Profitraten:

ρ	$\tilde{p}_1$	$\tilde{p}_2$	$\tilde{p}_3$	$\tilde{p}_4$
0	3.55	6.84	77.63	12.80
0.2	4.20	11.86	100.00	15.41
0.4	5.49	21.34	145.34	20.34
0.6	9.28	48.39	280.15	34.31
0.8	256.21	1784.56	9078.86	924.48

Man erkennt, wie mit zunehmender Profitrate die Preise, ausgedrückt in Lohneinheiten, steigen. Als Beispiel beziehen wir uns auf Güter der Produktionseinheit Nr. 4 (Getreide). Wäre die Profitrate Null, hätte eine Einheit Getreide einen Preis von 12.8 Arbeitsstunden, bei einer Profitrate von 80 % müßte man stattdessen 924 Stunden arbeiten, um eine Einheit Getreide kaufen zu können. Würde man die Profitrate kontinuierlich bis zu ihrem maximalen Wert steigern, würden die Preise schließlich beliebig groß, also der Lohnsatz Null werden.

Box 6.2.2 Skript zur Berechnung der maximalen Profitrate.

```
mdef(Pi,4,4) =                  # Definition der Matrix Pi
    0.0,  0.8, 2.0, 0.0,
    0.0,  0.0, 3.0, 0.125,
    0.02, 0.0, 0.0, 0.025,
    0.0,  0.0, 0.0, 0.0;
mdef(Phi,4,4) =                 # Definition der Matrix Phi
    0.0,  0.6, 1.5, 1.0,
    0.0,  0.0, 2.0, 0.08,
    0.01, 0.2, 0.0, 0.02,
    0.0,  0.0, 0.0, 0.0;
mdefi(4,4,I);                   # Definition einer Einheitsmatrix
mexpr(I - Pi,IPi);              # IPi = I - Pi
mginv(IPi,INV);                 # INV = Inverse von IPi
mpr(Inv);                       # Ausdruck von INV
mmul(Phi,Inv,PhInv);            # PhInv = Phi * Inv
mev(PhInv,ER,EI,EVR,EVI);       # Eigenwerte und Eigenvektoren
mpr(ER);                        # Ausdruck Eigenwerte Realteil
mpr(EI);                        # Ausdruck Eigenwerte Imaginaerteil
mpr(EVR);                       # Ausdruck Eigenvektoren Realteil
mpr(EVI);                       # Ausdruck Eigenvektoren Imaginaerteil

Eigenwerte (reell)

 -0.0265       1.2403      -0.4002       0.0000

Eigenvektoren (reell)

  0.9987       0.8852      -0.1462       0.9979
 -0.0476       0.4149      -0.9698      -0.0511
 -0.0186       0.2103       0.1954      -0.0212
  0.0000       0.0000       0.0000       0.0325
```

3. Ergänzend kann man sich auch auf eine bestimmte Bruttoproduktion $\mathbf{x}$ beziehen. Dann ist

$$\tilde{\mathbf{p}}'\mathbf{y} \;=\; \tilde{\mathbf{p}}'(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})\,\mathbf{x}$$

der Preisausdruck der Nettoproduktion. Dem Lohn entspricht dabei der Anteil $\mathbf{w}'\mathbf{x}$, der restliche Teil entspricht den kapitalistischen Erträgen.

Kapitel 7

Marktpreise und Preisstatistik

Wenn man die Produktion, den Austausch und die Verwendung von Gütern in einer Ökonomie empirisch erfassen möchte, ist es infolge der großen Vielzahl unterschiedlicher Güter praktisch unvermeidbar, Bewertungen zu verwenden, um Güter unterschiedlicher Sorten zu aggregieren. In der empirischen Wirtschaftsforschung werden meistens Marktpreise verwendet. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns zunächst mit einigen Varianten des Preisbegriffs, dann wird die Konstruktion von Preisindizes besprochen.

7.1 Tauschprozesse und Preise

1. Zunächst betrachten wir eine Ökonomie, in der Güter direkt, d.h. ohne Vermittlung von Geld, getauscht werden. Es wird angenommen, dass es n Sorten von Gütern

$$c_1, \ldots, c_n$$

gibt, die untereinander getauscht werden können. Der Austauschprozess besteht aus einer Folge von Tauschereignissen. Jedes Tauschereignis besteht darin, dass eine bestimmte Menge eines Gutes c_i gegen eine bestimmte Menge eines Gutes c_j ausgetauscht wird. Um einen Austauschprozess zu beschreiben, muss man also auf die Austauschereignisse Bezug nehmen, die während einer bestimmten Zeitperiode (die im folgenden als gegeben vorausgesetzt wird, z. B. ein Tag, ein Monat oder ein Jahr) stattgefunden haben.

2. Als Beispiel wird angenommen, dass es nur vier Sorten von Gütern gibt und dass folgende Austauschereignisse stattgefunden haben:

$$\begin{array}{llll}
3\,c_1 \sim 5\,c_2 & 4\,c_2 \sim 8\,c_3 & 8\,c_3 \sim 7\,c_4 & 7\,c_4 \sim 2\,c_1 \\
3\,c_1 \sim 6\,c_2 & 4\,c_2 \sim 8\,c_3 & 8\,c_3 \sim 8\,c_4 & 8\,c_4 \sim 2\,c_1 \\
2\,c_1 \sim 4\,c_2 & 4\,c_2 \sim 9\,c_3 & 8\,c_3 \sim 9\,c_4 & 8\,c_4 \sim 3\,c_1
\end{array}$$

Beim ersten Tauschereignis wurden 3 Einheiten von c_1 gegen 5 Einheiten von c_2 getauscht, beim zweiten Tauschereignis wurden 3 Einheiten von c_1 gegen 6 Einheiten von c_2 getauscht usw. Natürlich können die Austauschverhältnisse variieren, denn jedes Austauschereignis spielt sich unter jeweils spezifischen Bedingungen und im allgemeinen unter Beteiligung unterschiedlicher Akteure ab. Außerdem gibt es meistens mehr oder weniger viele Gütersorten, die gar nicht direkt ausgetauscht werden.

3. Sind Daten über die individuellen Austauschereignisse gegeben, kann man für jedes Paar von Gütern (c_i, c_j) feststellen: ob mindestens ein Austausch stattgefunden hat und, wenn ja, wie das durchschnittliche Austauschverhältnis während des Beobachtungszeitraums beschaffen war.[1] Mit den oben angegebenen Daten kann man z. B. feststellen, dass zwischen den Gütersorten c_1 und c_3 kein Austausch stattgefunden hat. Andererseits gab es drei Austauschereignisse, in denen die Gütersorten c_1 und c_2 ausgetauscht worden sind, insgesamt 8 Einheiten von c_1 gegen 15 Einheiten von c_2. Die durchschnittlichen Austauschverhältnisse können durch Koeffizienten u_{ij} ausgedrückt werden, wobei u_{ij} diejenige Menge des Gutes c_j ist, die im Durchschnitt gegen eine Einheit des Gutes c_i getauscht worden ist. Z. B. ist $u_{12} = 15/8$. Aus Symmetriegründen kann man annehmen, dass $u_{ij} = 1/u_{ji}$ ist. Auf diese Weise gelangt man zu einer schief-symmetischen, im allgemeinen unvollständigen Matrix

$$\mathbf{U} = (u_{ij}) = \begin{pmatrix} - & \frac{15}{8} & - & \frac{23}{7} \\ \frac{8}{15} & - & \frac{25}{12} & - \\ - & \frac{12}{25} & - & \frac{24}{24} \\ \frac{7}{23} & - & \frac{24}{24} & - \end{pmatrix}$$

die die durchschnittlichen Austauschrelationen zusammenfasst. Die leeren Felder zeigen, welche Gütersorten nicht miteinander getauscht worden sind.

4. Es ist bemerkenswert, dass Austauschrelationen im allgemeinen nicht transitiv sind, d.h. im allgemeinen gilt die Transitivitätsregel

$$\alpha_i\, c_i \sim \alpha_j\, c_j \quad \text{und} \quad \alpha_j\, c_j \sim \alpha_k\, c_k \quad \Longrightarrow \quad \alpha_i\, c_i \sim \alpha_k\, c_k$$

nicht. Z. B. gilt diese Regel in unserem Beispiel nicht; denn einerseits ist

$$u_{12}\, u_{23}\, u_{34} \;=\; \frac{15}{8}\,\frac{25}{12}\,\frac{24}{23} \;=\; 4.076$$

andererseits ist jedoch $u_{14} = \frac{23}{7} = 3.286$.

5. Hier liegt ein Ansatzpunkt für Überlegungen, die mit einem Begriff des „wirtschaftlichen Gleichgewichts“ operieren. Eine Minimaldefinition kann auf folgende Weise formuliert werden: Eine Menge von Austauschereignissen befindet sich in einem wirtschaftlichen Gleichgewicht, wenn die im Durchschnitt realisierten Austauschrelationen transitiv sind. Orientiert man sich an dieser Definition, kann man sagen, dass sich Mengen von Austauschereignissen im allgemeinen nicht in einem wirtschaftlichen Gleichgewicht befinden.

[1] Da sich Daten immer nur auf vergangene Sachverhalte beziehen können, verwenden wir die sprachliche Vergangenheitsform.

6. Jetzt betrachten wir eine Ökonomie, in der Austauschprozesse monetär vermittelt stattfinden. Das soll bedeuten: Es gibt eine besondere Ware c^* (Geld), und in Tauschereignissen werden stets nur Güter gegen Geld getauscht.[2] Dann kann man von Preisen (im Unterschied zu Austauschrelationen) sprechen. Allerdings hängt die Bedeutung des Begriffs vom theoretischen Kontext ab. Einerseits kann man im Rahmen von Modellen Preise konstruieren; wir sprechen dann von *Modellpreisen* oder *Bewertungen*. Andererseits kann man sich auf *Marktpreise* beziehen, also auf Preise, die bei realen Transaktionen vereinbart und gezahlt werden.[3] Eine weitere Unterscheidung bezieht sich auf das Reden von Marktpreisen. Denn einerseits kann man sich mit dem Begriff auf jeweils spezifische Transaktionen beziehen; aber dann gibt es nicht für jede Gütersorte einen bestimmten Marktpreis, sondern sowohl die Gütermengen als auch ihre Marktpreise weisen zwischen den Transaktionen mehr oder weniger große Unterschiede auf. Andererseits kann man eine statistische Betrachtungsweise einnehmen und sich auf durchschnittliche Marktpreise während einer gewissen Zeitperiode beziehen. Wir sprechen im ersten Fall von *individuellen*, im zweiten Fall von *statistischen Marktpreisen*. Natürlich bilden individuelle Marktpreise das Ausgangsmaterial für die Konstruktion statistischer Marktpreise. Der Konstruktionsprozess verläuft dabei im Prinzip genauso, wie es zu Beginn dieses Abschnitts für nicht-monetäre Transaktionen dargestellt worden ist. Wenn im folgenden ohne Zusatz von Marktpreisen gesprochen wird, sind stets statistische Marktpreise gemeint.

7. Es ist bemerkenswert, dass sich bei Marktpreisen das oben erwähnte Transitivitätsproblem nicht stellt. Denn wenn Tauschereignisse, in denen direkt Mengen eines Gutes gegen Mengen eines anderen Gutes ausgetauscht werden, nicht mehr stattfinden, entfällt gewissermaßen die empirische Grundlage, um Intransitivitäten feststellen zu können. Man kann sogar zu jedem System von Marktpreisen auf einfache Weise ein System transitiver Austauschrelationen konstruieren. Sei nämlich p_i der Marktpreis für das Gut c_i. Dann kann man Austauschrelationen

$$u^*_{ij} \;:=\; \frac{p_i}{p_j}$$

definieren und folgendermaßen interpretieren: u^*_{ij} ist die Menge des Gutes c_j, die sich – monetär vermittelt – gegen eine Einheit des Gutes c_i aus-

[2] Geld ist bei dieser Betrachtungsweise eine spezifische Gütersorte, die dem Zweck dient, monetäre Austauschprozesse zu vermitteln. Man kann zwar im Rahmen von Modellen die Preise der Güter durch Einheiten beliebiger anderer Güter (oder auch durch Arbeitszeit) ausdrücken, die dann als „Numéraire“ (L. Walras) verwendet werden. Dadurch werden aber diese Güter nicht zu Geld.

[3] Das Wort ‘Transaktion’ bezieht sich hier und im folgenden auf Austauschereignisse, in denen eine bestimmte Menge eines Guts gegen einen bestimmten Geldbetrag ihren Besitzer wechselt.

tauscht. Diese konstruierten Austauschrelationen sind offensichtlich transitiv, denn:

$$u^*_{ij}\,u^*_{jk} \;=\; \frac{p_i}{p_j}\frac{p_j}{p_k} \;=\; \frac{p_i}{p_k} \;=\; u^*_{ik}$$

So gelangt man zu der Schlußfolgerung, dass sich eine Menge monetär vermittelter Austauschereignisse immer in einem (fiktiven) „wirtschaftlichen Gleichgewicht“ befindet.

8. Zur Vermeidung von Mißverständnissen sei darauf hingewiesen, dass die hier verwendete Definition eines „wirtschaftlichen Gleichgewichts“ keineswegs alle Vorstellungen erfasst, die in den Wirtschaftswissenschaften mit diesem Konzept verbunden werden. Eine dieser weiteren Vorstellungen bezieht sich darauf, dass Güter angeboten und nachgefragt werden. Um ein rudimentäres Verständnis der damit verbundenen Probleme zu gewinnen, erweitern wir die bisherigen Überlegungen und stellen uns vor, dass sich bestimmte Mengen der Güter $c_1, \ldots, c_n$ im Besitz von Akteuren befinden. Um zu einem möglichst einfachen Modell zu gelangen, werden folgende Annahmen getroffen:

a) Es gibt n Akteure, auf die durch die Symbole $\omega_1, \ldots, \omega_n$ verwiesen werden kann. Jeder Akteur ist im Besitz einer bestimmten Menge genau einer Gütersorte, und zwar besitzt ω_i die Menge s_i der Gütersorte c_i.

b) Jeder Akteur ist bereit, die gesamte Gütermenge, die er besitzt, zum Tausch anzubieten.[4] Das Angebot lässt sich also durch einen Vektor

   $$\mathbf{s} \;:=\; (s_1, \ldots, s_n)'$$

   repräsentieren.

c) Jeder Akteur möchte durch den Tauschprozess in den Besitz bestimmter Mengen der insgesamt vorhandenen Güter gelangen, so dass die Nachfrage nach Gütern durch ω_i durch einen Zeilenvektor

   $$\mathbf{d}_i \;:=\; (d_{i1}, \ldots, d_{in})$$

   repräsentiert werden kann.

Somit stellen sich zwei Fragen: Sind Angebot und Nachfrage überhaupt vereinbar? Und, wenn dies der Fall ist, gibt es Marktpreise, zu denen der Austausch stattfinden könnte?

9. Die erste Frage kann leicht beantwortet werden. Vereinbarkeit ist dann gegeben, wenn für jede Gütersorte c_j die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} d_{ij} \;=\; s_j \tag{7.1.1}$$

[4] Das ist keine Einschränkung, denn man kann sich vorstellen, dass die für den Eigenverbrauch bestimmen Güter bereits abgezogen worden sind.

gilt. Denn auf der linken Seite steht die gesamte Nachfrage, auf der rechten das gesamte Angebot für die Gütersorte c_j. Dies soll im folgenden vorausgesetzt werden, um die zweite Frage zu überlegen. Die Frage bezieht sich darauf, ob es Modellpreise

$$\mathbf{p} \;:=\; (p_1, \ldots, p_n)'$$

gibt, so dass das Angebot und die Nachfrage auch dann vereinbar sind, wenn sie mit solchen Preisen bewertet werden.

10. Betrachtet man den Preisvektor $\mathbf{p}$ als eine zunächst unbestimmte Größe, kann man eine hypothetische Gegenüberstellung vornehmen. Auf der einen Seite kann man jedem Akteur ω_i einen hypothetischen Geldbesitz von $s_i\,p_i$ Geldeinheiten zurechnen. Auf der anderen Seite benötigt ω_i Geld, um die Güter, die er haben möchte, kaufen zu können, nämlich: $d_{i1}p_1 + \ldots + d_{in}p_n$. Vereinbarkeit setzt also voraus, dass folgende Gleichungen erfüllt sind:

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij}\,p_j \;=\; s_i\,p_i \tag{7.1.2}$$

Um zu untersuchen, unter welchen Bedingungen das der Fall ist, ist es nützlich, die Matrixschreibweise zu verwenden. Definiert man nämlich eine Matrix $\mathbf{Z} = (z_{ij})$ durch $z_{ij} := d_{ij}/s_i$, kann man die Gleichungen (7.1.2) in folgender Weise zusammenfassen:

$$\mathbf{Z}\,\mathbf{p} \;=\; \mathbf{p} \tag{7.1.3}$$

Hieraus sieht man, dass es eine Lösung nur dann geben kann, wenn einer der Eigenwerte der Matrix $\mathbf{Z}$ gleich 1 ist. Dies folgt jedoch bereits aus der in (7.1.1) formulierten Annahme, dass Angebot und Nachfrage in Form von Gütern miteinander vereinbar sind. Denn aus (7.1.1) folgt, dass alle Zeilensummen von $\mathbf{Z}$ gleich 1 sind; und infolgedessen hat $\mathbf{Z}$ auch einen Eigenvektor gleich 1 (vgl. Anhang A). Als Lösung erhält man also einen Preisvektor, der zu dem Eigenvektor proportional ist, der zum Eigenwert 1 der Matrix $\mathbf{Z}$ gehört. Allerdings handelt es sich um Modellpreise, die auf der sehr restriktiven Voraussetzung (7.1.1) beruhen.

7.2 Berechnung von Preisindizes

1. Statistische Informationen über Preise und ihre Entwicklung werden fast immer in Form von Preisindizes dargestellt. In diesem Abschnitt wird besprochen, wie solche Preisindizes berechnet werden. Als Kontext wird vorausgesetzt, dass Marktpreise erfasst werden sollen. Den Ausgangspunkt bilden also einzelne Transaktionen, in denen eine jeweils bestimmte Menge einer bestimmten Gütersorte gegen eine bestimmte Menge Geld (ausgedrückt in Geldeinheiten, z. B. DM oder Euro) verkauft bzw. gekauft wird. Allerdings muss man sich noch darüber verständigen, wie von Marktpreisen gesprochen werden soll. Z. B. heißt es bei Wagenführ (1970, S. 490 f.):

„Ganz allgemein ist der Preis der in Währungseinheiten ausgedrückte, beim Abschluß des Kaufvertrags vereinbarte Gegenwert für die Überlassung eines Gutes oder die Leistung eines Dienstes."

Hier bezieht sich also der Preisbegriff auf die jeweils gesamte Gütermenge, die bei einer Transaktion ihren Besitzer wechselt. Dagegen schreibt v. d. Lippe (1996, S. 401):

„Preise sind bei Kaufverträgen verabredete Geldbeträge je Produkteinheit."

Folgt man dieser Definition, bezieht sich der Preisbegriff nicht auf die jeweils gesamte Gütermenge, sondern auf eine Einheit des Guts (in einer nach Art der Gütersorte festzulegenden Einheit). Da für eine Berechnung von Preisindizes in jedem Fall eine Bezugnahme auf Einheiten unterschiedlicher Güter erforderlich ist, verwenden wir im folgenden die Definition von v. d. Lippe. Sie entspricht auch einer statistischen Betrachtungspreise, bei der durch Durchschnittsbildungen von den individuellen Transaktionen bzw. Marktpreisen abstrahiert wird.

2. Zunächst muss festgelegt werden, welche Transaktionen erfasst werden sollen:

a) Dies erfordert erstens eine Festlegung der Gütersorten, deren Transaktionen beobachtet werden sollen. Wir verwenden dafür wie bisher die Notation $c_1, \ldots, c_n$, wobei c_j eine Einheitsmenge des j-ten Guts bezeichnet.

b) Weiterhin muss ein räumliches Gebiet festgelegt werden, in dem die Transaktionen beobachtet werden sollen, z. B. eine Gemeinde oder ein Bundesland oder die gesamte BRD.

c) Schließlich muss ein Zeitraum festgelegt werden, in dem die Transaktionen erfasst werden sollen, z. B. ein Tag, eine Woche, ein Monat oder ein Jahr. Wir sprechen im folgenden von Perioden und beziehen uns auf sie mit dem Index t.

Tabelle 7.2.1 Fiktive Daten für die Entwicklung der Umsätze und Preise von drei Gütersorten während fünf Perioden.

Periode	Gütermengen			Preise			u_t
1	1	1	1	4	2	3	9
2	1	2	1	4	2	4	12
3	1	1	2	4	3	4	15
4	1	2	2	5	5	3	21
5	2	2	3	4	4	2	22

Auf diese Weise ist die Gesamtheit der Transaktionen durch eine gedankliche Konstruktion festgelegt. Zwar wird man in den meisten Fällen eine vollständige Erfassung nicht realisieren können; für die Überlegungen dieses Abschnitts soll jedoch angenommen werden, dass vollständige Daten verfügbar sind, so dass man für jedes Gut c_j folgende Größen kennt: Die gesamte Gütermenge a_{tj}, die in der Periode t umgesetzt worden ist (im folgenden *Umsatz* genannt), und den gesamten Geldbetrag g_{tj}, der dafür gezahlt worden ist. Der Marktpreis des Guts in der Periode t ist dann $p_{tj} := g_{tj}/a_{tj}$.

3. Der Konstruktion von Preisindizes liegt die Fragestellung zugrunde, wie man sich ein Bild von der zeitlichen Entwicklung von Gesamtumsätzen machen kann, bei dem hypothetisch zwischen zwei „Komponenten" unterschieden wird: Veränderungen in den umgesetzten Gütermengen und Veränderungen in den Preisen. Zu betonen ist, dass es sich um fiktive Konstruktionen handelt, da den „Komponenten" keine empirischen Sachverhalte entsprechen. Um das Problem zu verdeutlichen, kann ein kleines Zahlenbeispiel dienen. Es wird angenommen, dass Daten für drei Gütersorten und fünf Perioden verfügbar sind (Tabelle 7.2.1). Das Problem besteht offensichtlich darin, dass man zur Repräsentation sowohl der Umsätze als auch der Preise Vektoren benötigt. Für die Umsätze die Vektoren

$$\mathbf{a}_t := (a_{t1}, \ldots, a_{tn})'$$

und für die Preise die Vektoren

$$\mathbf{p}_t := (p_{t1}, \ldots, p_{tn})'$$

Wie sich diese Vektoren verändern, kann jedoch nicht durch einfache Zahlen ausgedrückt werden. Z. B. kann man nicht sagen, um wie viel Prozent $\mathbf{a}_2$ größer ist als $\mathbf{a}_1$. Zwar kann man *monetäre Gesamtumsätze* berechnen:

$$u_t := \sum_{j=1}^{n} a_{tj}\, p_{tj} = \mathbf{a}_t'\, \mathbf{p}_t$$

Für unser Beispiel sind die Werte in der letzten Spalte von Tabelle 7.2.1 angegeben. Somit kann man z.B. sagen, dass dieser Gesamtumsatz von der ersten zur zweiten Periode um ein Drittel zugenommen hat. Aber man kann nicht sagen, welcher Teil davon durch Veränderungen in den Umsätzen und welcher Teil durch Veränderungen in den Preisen zustandegekommen ist.

4. Um für dieses unlösbare Problem dennoch zu „behelfsmäßigen Lösungen“ zu gelangen, haben sich Statistiker eine Vielzahl unterschiedlicher Indexkonstruktionen ausgedacht. In der Praxis werden hauptsächlich zwei Arten von Indizes verwendet. Beide können als Preis- und als Mengenindizes verwendet werden. Die erste Variante wird nach dem Statistiker Etienne Laspeyres (1834–1913) benannt. In der Form eines Preisindex lautet die Definition:

$$P^l_{t_0,t_1} := \frac{\sum_{j=1}^n a_{t_0 j}\, p_{t_1 j}}{\sum_{j=1}^n a_{t_0 j}\, p_{t_0 j}} = \frac{\mathbf{a}'_{t_0}\,\mathbf{p}_{t_1}}{\mathbf{a}'_{t_0}\,\mathbf{p}_{t_0}}$$

Um die Veränderung der Preise zwischen einer Anfangsperiode t_0 und einer späteren Periode t_1 „unter Ausschaltung von Umsatzänderungen“ zu erfassen, wird hypothetisch angenommen, dass die in der Periode t_1 beobachteten Preise auch realisiert worden wären, wenn sich die Umsätze nicht verändert hätten. Analog lautet die Definition für Laspeyres’ Mengenindex:

$$Q^l_{t_0,t_1} := \frac{\sum_{j=1}^n a_{t_1 j}\, p_{t_0 j}}{\sum_{j=1}^n a_{t_0 j}\, p_{t_0 j}} = \frac{\mathbf{a}'_{t_1}\,\mathbf{p}_{t_0}}{\mathbf{a}'_{t_0}\,\mathbf{p}_{t_0}}$$

In diesem Fall wird angenommen, dass sich die Preise nicht verändert hätten, d.h. es werden zur Bewertung der Umsätze jedesmal die Preise der Basisperiode t_0 verwendet.[5]

5. Eine andere Variante wurde von dem Statistiker Hermann Paasche (1851–1925) vorgeschlagen. Seine Definitionen verwenden nicht die Umsätze bzw. Preise der Basisperiode t_0, sondern der jeweils aktuellen Periode t_1. Für den Preisindex gelangt man dann zur Definition

$$P^p_{t_0,t_1} := \frac{\sum_{j=1}^n a_{t_1 j}\, p_{t_1 j}}{\sum_{j=1}^n a_{t_1 j}\, p_{t_0 j}} = \frac{\mathbf{a}'_{t_1}\,\mathbf{p}_{t_1}}{\mathbf{a}'_{t_1}\,\mathbf{p}_{t_0}}$$

und für den korrespondierenden Mengenindex zur Definition

$$Q^p_{t_0,t_1} := \frac{\sum_{j=1}^n a_{t_1 j}\, p_{t_1 j}}{\sum_{j=1}^n a_{t_0 j}\, p_{t_1 j}} = \frac{\mathbf{a}'_{t_1}\,\mathbf{p}_{t_1}}{\mathbf{a}'_{t_0}\,\mathbf{p}_{t_1}}$$

6. Zur Illustration berechnen wir die Indizes mit den Zahlen aus Tabelle 7.2.1. Tabelle 7.2.2 zeigt die Ergebnisse. Man erkennt, dass sich die Werte

[5] In der Literatur werden die hypothetisch als konstant angenommenen Vektoren der Basisperiode (bei Preisindizes $\mathbf{a}_{t_0}$, bei Mengenindizes $\mathbf{p}_{t_0}$) oft als „Wägungsschemas“, in manchen Zusammenhängen auch als „Warenkorb“ bezeichnet.

Tabelle 7.2.2 Berechnung von Preis- und Mengenindizes mit den in Tabelle 7.2.1. angegebenen Zahlen.

t_0	t_1	$\mathbf{a}'_{t_0}\,\mathbf{p}_{t_0}$	$\mathbf{a}'_{t_0}\,\mathbf{p}_{t_1}$	$\mathbf{a}'_{t_1}\,\mathbf{p}_{t_0}$	$\mathbf{a}'_{t_1}\,\mathbf{p}_{t_1}$	$P^l_{t_0t_1}$	$P^p_{t_0t_1}$	$Q^l_{t_0t_1}$	$Q^p_{t_0t_1}$
1	2	9	10	11	12	1.11	1.09	1.22	1.20
2	3	12	14	14	15	1.17	1.07	1.17	1.07
3	4	15	16	18	21	1.07	1.17	1.20	1.31
4	5	21	16	29	21	0.76	0.72	1.38	1.31

erheblich unterscheiden können. So wird verständlich, dass im Laufe der Zeit zahlreiche weitere Vorschläge für Indexkonstruktionen gemacht worden sind und die Diskussion über Vor- und Nachteile der verschiedenen Indizes bis heute anhält. Darauf soll hier nicht näher eingegangen werden.[6] Die meisten vom Statistischen Bundesamt berechneten Preisindizes beruhen auf der Definition von Laspeyres (hauptsächlich wohl deshalb, weil sich das Wägungsschema ($\mathbf{a}_t$) weniger leicht aktualisieren lässt als die Preisinformation).

7. Die angeführten Definitionen zeigen, dass sich Preisindizes stets auf zwei Zeitperioden beziehen. Man kann also nicht von einem absoluten Preisniveau, sondern nur von Veränderungen des Preisniveaus sprechen, wobei natürlich die Veränderungen auch davon abhängen, welche Arten von Preisindizes verwendet werden. Außerdem ist klar, dass stets eine Angabe der Gütersorten erfolgen muss, auf deren Transaktionen sich Veränderungen des Preisniveaus beziehen sollen. Das Statistische Bundesamt berechnet deshalb eine Vielzahl unterschiedlicher Preisindizes, die sich auf jeweils unterschiedlich ausgesuchte Arten von Gütern beziehen.

8. Da in der amtlichen Statistik zumeist Indexziffern (auch Indexzahlen genannt) ausgewiesen werden, soll kurz der Zusammenhang besprochen werden. Als Beispiel wird auf Preisindizes Bezug genommen (ganz analoge Überlegungen gelten für Mengenindizes). Das Ziel besteht in diesem Fall darin, die Preisentwicklung (Veränderungen des Preisniveaus) während einer Folge von Perioden $t_0, t_1, t_2, \ldots$ darzustellen. t_0 wird als *Basisperiode* bezeichnet. Werden Laspeyres-Indizes verwendet, bezieht sich auch meistens das Wägungsschema auf diese Basisperiode, und es wird dann für alle weiteren Perioden unverändert beibehalten, bis (in größeren zeitlichen Abständen) ein neues Wägungsschema eingeführt wird. Die Berechnung von Indexziffern erfolgt nun so, dass der Indexziffer, mit der Veränderungen des Preisniveaus erfasst werden sollen, in der Basisperiode der Wert 100 gegeben wird. Bezeichnet I_t die Indexziffer, wird also $I_{t_0} = 100$ gesetzt. Die weiteren Werte ergeben sich dann aus den Preisindizes. Tabelle 7.2.3

[6] Man vgl. z. B. Kunz (1987, S. 282ff.), v. d. Lippe (1996, S. 407ff.), Neubauer (1996), Rinne (1996, S. 321ff.), Krug, Nourney und Schmidt (1999, S. 368ff.).

Tabelle 7.2.3 Berechnung von Indexziffern für das Preisniveau.

t	Preisindex	Indexziffer
t_0		$I_{t_0} = 100$
t_1	$P_{t_0 t_1}$	$I_{t_1} = I_{t_0} P_{t_0 t_1}$
t_2	$P_{t_1 t_2}$	$I_{t_2} = I_{t_1} P_{t_1 t_2}$
t_3	$P_{t_2 t_3}$	$I_{t_3} = I_{t_2} P_{t_2 t_3}$
t_4	$P_{t_3 t_4}$	$I_{t_4} = I_{t_3} P_{t_3 t_4}$

verdeutlicht die Berechnung. Zur Illustration können folgende Indexziffern für die Erzeugerpreise landwirtschaftlicher Produkte dienen:[7]

1995	1996	1997	1998	1999	2000
100.0	101.9	104.1	96.5	91.2	100.0

Als Basisperiode dient in diesem Fall das Jahr 1995. Im Übergang von 1995 nach 1996 hat das Preisniveau um 1.9 % zugenommen, im Übergang von 1995 nach 1997 um 4.1 %, im Übergang von 1996 nach 1997 um 1.0 % usw. Zugrunde liegen Preisindizes nach Laspeyres, die, wie Tabelle 7.2.3 zeigt, direkt aus den prozentualen Veränderungen der Indexziffern berechnet werden können.

9. An diesem Beispiel kann noch ein weiterer Aspekt der Darstellung von Preisindizes erläutert werden. In den meisten Fällen beziehen sich nämlich die Datengewinnung und die primären Berechnungen auf Monate. In den Fachserien, in denen das Statistische Bundesamt ausführliche Ergebnisse mitteilt,[8] werden deshalb in der Regel Zeitreihen auf Monatsbasis dargestellt. In vielen zusammenfassenden Übersichten, so auch in dem oben angeführten Beispiel, werden dagegen jährliche Angaben gemacht. Also muss überlegt werden, wie man die monatlichen Indexziffern zu jährlichen Indexziffern zusammenfasst.

[7] Statistisches Jahrbuch 2001, S. 617.

[8] Es handelt sich um die Fachserie 17, die in 11 Reihen gegliedert ist, in denen über unterschiedliche Preisindizes berichtet wird.

Kapitel 8

Input-Output-Tabellen

In Kap. 6 wurden einfache Modelle besprochen, mit denen ökonomische Abhängigkeitsbeziehungen in der gesellschaftlichen Güterproduktion reflektierbar gemacht werden können. Zur empirischen Ermittlung solcher Beziehungen dienen Input-Output-Tabellen, mit denen wir uns in diesem und den folgenden Kapiteln beschäftigen. Die Grundidee besteht darin, Produktionsbereiche zu unterscheiden und zu untersuchen, welche Vorleistungen sie einsetzen und wie die von ihnen produzierten Güter verwendet werden.[1] Erste Versuche, solche Tabellen für die BRD zu konstruieren, begannen Ende der 1950er Jahre. Die erste Arbeit stammt von W. Krelle (1959). In den 1960er Jahren folgten Arbeiten wirtschaftswissenschaftlicher Forschungsinstitute, insbesondere des Deutschen Instituts für Wirtschaftsforschung (DIW) in Berlin, des Ifo-Instituts in München und des Rheinisch-Westfälischen Instituts für Wirtschaftsforschung (RWI) in Essen. In den 1960er Jahren wurde auch im Statistischen Bundesamt mit der Erarbeitung von Input-Output-Tabellen begonnen.[2] Regelmäßige Veröffentlichungen gibt es jedoch erst seit 1972 in der Fachserie 18, Reihe 2 (Input-Output-Tabellen).[3] Die zur Zeit aktuellste Input-Output-Tabelle bezieht sich auf das Berichtsjahr 1995. Zwar wurde im Statistischen Jahrbuch für 2001 bereits eine aggregierte Tabelle für 1997 veröffentlicht; der ausführliche Bericht in der Fachserie war jedoch bis zur Abfassung dieses Kapitels noch nicht erschienen. Die folgenden Erläuterungen orientieren sich deshalb an der Input-Output-Tabelle für 1995. Zum Verweis auf die Dokumentation der Daten in der Fachserie 18, Reihe 2, Input-Output-Rechung 1995 (erschienen 2000 im Verlag Metzler-Poeschel, Stuttgart) wird die Abkürzung FS 18, R. 2–1995 verwendet.

[1] Diese Idee hat eine lange Geschichte. Hinweise findet man bei A. E. Ott (1972) und P. Fleissner u.a. (1993, S. 22 ff.).

[2] Man vgl. hierzu H. Mai (1973). Zahlreiche Hinweise zur Entwicklung und zum gegenwärtigen Stand der Erstellung von Input-Output-Tabellen durch das Statistische Bundesamt findet man auch bei P. Bleses und C. Stahmer (1994) und bei U.-P. Reich u.a. (1995, S. 29 ff.). Eine umfassende Übersicht über Input-Output-Tabellen, die in der BRD bis Anfang der 1980er Jahre erstellt wurden, hat R. Stäglin (1982) zusammengestellt.

[3] Über den gegenwärtigen Stand informiert ein Internet-Dokument von C. Stahmer, P. Bleses und B. Meyer (2000).

8.1 Gliederungen der Güterproduktion

1. Eine erste Frage bezieht sich auf die Definition der Produktionsbereiche, deren Verflechtung in einer Input-Output-Tabelle erfasst werden soll. Es gibt hauptsächlich zwei unterschiedliche Gliederungsprinzipien:

a) Man spricht von einer *institutionellen* Gliederung, wenn man von institutionell abgegrenzten Wirtschaftsunternehmen ausgeht, sie nach dem Schwerpunkt der von ihnen produzierten Gütersorten klassifiziert und dann zu Produktionsbereichen zusammenfasst.

b) Dagegen spricht man von einer *funktionellen* Gliederung, wenn man die Produktionsbereiche durch Klassen möglichst homogener Gütersorten definiert, ohne sich zunächst an institutionellen Abgrenzungen zu orientieren.

Je nachdem sind auch die in einer Input-Output-Tabelle erfassten Güterströme unterschiedlich zu interpretieren. Geht man von einer institutionellen Gliederung aus, werden im wesentlichen marktvermittelte Transaktionen von Gütern erfasst; in der Literatur wird gelegentlich von „Marktverflechtungstabellen“ gesprochen. Geht man dagegen von einer funktionellen Gliederung aus, soll erfasst werden, wie möglichst homogene Güter produziert und verwendet werden, im Prinzip unabhängig davon, ob ihre Zirkulation marktvermittelt stattfindet oder nicht.[4]

2. In der Literatur wird überwiegend die Auffassung vertreten, dass beide Gliederungsmöglichkeiten sinnvoll sind und sich gegenseitig ergänzen können.[5] Dementsprechend werden auch beide Gliederungsmöglichkeiten in der Praxis verwendet. Z.B. wird bei der Konstruktion von Input-Output-Tabellen im DIW von einer institutionellen Gliederung ausgegangen. Dazu heißt es in einem Bericht von R. Stäglin und H. Wessels (1969, S. 5):

„Den gesamtwirtschaftlichen Tabellen liegt das *institutionelle* Prinzip der Sektorenbildung mit dem *Unternehmen* als der statistischen Einheit zugrunde, die Tabellen stellen also *Matrizen der Marktverflechtung auf Unternehmensbasis* dar. Die Unternehmen als die auf dem Markt wirtschaftlich selbständig auftretenden Produktionseinheiten – definiert als kleinste selbst bilanzierende Einheiten – werden nach dem sogenannten *Schwerpunktprinzip* vollständig dem Sektor zugeteilt, auf den der überwiegende Teil ihrer wirtschaftlichen Tätigkeit entfällt. Das hat statistisch gesehen den Vorteil, daß eine Aufspaltung der heterogenen Produktionsprogramme der Unternehmen nach Produkten bzw. Produktgruppen vermieden und somit das Problem der Behandlung der Neben- und Kuppelprodukte

[4] In Input-Output-Tabellen, die von einer funktionellen Gliederung ausgehen, wird auch oft der Versuch gemacht, nicht marktvermittelte Güterströme einzubeziehen.

[5] Man vgl. z.B. die Diskussion bei Stäglin (1968, S. 19 ff.), Fleissner u.a. (1993, S. 28 ff.) und U.-P. Reich u.a. (1995). In der Arbeit von Stäglin findet man auch ein sehr instruktives Zahlenbeispiel, an dem die Grundgedanken der Aufstellung von Input-Output-Tabellen verdeutlicht wird.

weitgehend vermieden werden kann.

Die Wahl des Unternehmens als Produktionseinheit macht es auch möglich, die Input-Output-Tabellen vollständig in das *Kontensystem* und die *Ergebnisse der amtlichen volkswirtschaftlichen Gesamtrechnung für die Bundesrepublik Deutschland* zu integrieren.“

3. Das Statistische Bundesamt geht nicht von einer institutionellen, sondern von einer funktionellen Gliederung aus.[6] In der FS 18, R. 2–1995 (S. 15) gibt es folgende Erläuterungen:

„Im ESVG[7] 1995 werden drei Arten statistischer Einheiten unterschieden:

- institutionelle Einheiten,
- örtliche fachliche Einheiten,
- homogene Produktionseinheiten.

Institutionelle Einheiten umfassen Einheiten, die entweder selbst bilanzieren oder bei denen es aus rechtlicher und wirtschaftlicher Sicht möglich wäre, eine vollständige Rechnungsführung zu erstellen. [...]

Für eine institutionelle Einheit können mehrere *örtliche fachliche Einheiten* nachgewiesen werden. Örtliche fachliche Einheiten können bestimmt werden, wenn mindestens folgende Größen vorliegen: Produktionswert, Vorleistungen, Arbeitnehmerentgelte, Betriebsüberschuss, Beschäftigte und Bruttoanlageinvestitionen. Die örtliche fachliche Einheit entspricht in Deutschland in der Regel dem Unternehmen. [...].

Die Darstellungseinheit in den Input-Output-Tabellen ist die im Hinblick auf die Produktionstechnik und Inputstruktur möglichst homogene Produktionseinheit. Sie ist unter streng fachlichen Gesichtspunkten abgegrenzt: Sie erzeugt jeweils nur Güter einer bestimmten Gütergruppe. Die Produktionstätigkeit der *homogenen Produktionseinheit* umfaßt – anders als die von örtlichen fachlichen Einheiten – keine Nebentätigkeiten, wie beispielsweise die Erzeugung von Strom oder die Errichtung von Bauten durch ein Unternehmen mit anderer Haupttätigkeit. Für diese Nebentätigkeiten werden eigene Einheiten gebildet, so dass ein Unternehmen mit Nebentätigkeiten in mehrere homogene Produktionseinheiten aufgeteilt wird.“

Tabelle 8.1.1 zeigt die Gliederung in Produktionsbereiche bzw. Gütergruppen, von der die Input-Output-Tabelle 1995 ausgeht. Anhand dieser Tabelle erkennt man auch, dass der Güterbegriff in einer sehr weiten Bedeutung

[6] An einer funktionellen Gliederung orientieren sich auch die Vorgaben des Statistischen Amts der Europäischen Gemeinschaften. Über die zunehmende Bedeutung dieser Vorgaben für die Volkswirtschaftliche Gesamtrechnung (VGR) und speziell die Aufstellung von Input-Output-Tabellen findet man zahlreiche Informationen bei U.-P. Reich u.a. (1995, S. 15 ff.).

[7] [ESVG ist eine Abkürzung für das „Europäische System der Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnung“, in dem auch Prinzipien für die Aufstellung von Input-Output-Tabellen angegeben sind. Die erste Formulierung wurde 1970 veröffentlicht, eine überarbeitete Ausgabe erschien 1984. Inzwischen gibt es auch eine Neufassung, die ESVG 1995.]

verwendet wird, die sowohl materielle Güter als auch Dienstleistungen umfasst.[8]

4. Ergänzend sei auf folgende Erläuterungen in der FS 18, R. 2–1995, S. 15 f., hingewiesen:

„Die Gliederung der Wirtschaftsbereiche folgt der Klassifikation der Wirtschaftszweige mit Erläuterungen – Ausgabe 1993 (WZ 93). Die Bereichsgliederung ist international harmonisiert: Die WZ 93 baut auf der statistischen Systematik der Wirtschaftszweige in der Europäischen Gemeinschaft (NACE Rev. 1) auf. Diese wiederum basiert auf der Internationalen Systematik der Wirtschaftszweige (ISIC Rev. 3) der Vereinten Nationen.

Wie bereits erwähnt erfolgt die Zuordnung der örtlichen fachlichen Einheiten – das sind in der Regel Unternehmen – zu Wirtschaftsbereichen nach dem Schwerpunkt ihrer wirtschaftlichen Tätigkeit, einschließlich aller Nebentätigkeiten. Ergänzend sind in einigen Wirtschaftsbereichen aber auch Einheiten aus den Sektoren Staat und Private Organisationen ohne Erwerbszweck enthalten, soweit sie statistisch anhand der genannten Kriterien für örtliche fachliche Einheiten abgrenzbar sind. Beispiele für solche Wirtschaftsbereiche sind Erziehung und Unterricht oder Forschung und Entwicklung.

Auf folgende Besonderheiten ist hinzuweisen:

- aus statistischen Gründen wird die gesamte Wohnungsvermietung im Wirtschaftsbereich Grundstücks- und Wohnungswesen nachgewiesen, d.h. einschließlich der Wohnungseigennutzung und unabhängig davon, ob sie als Haupt- oder Nebentätigkeit einer wirtschaftlichen Einheit ausgeübt wird,
- die örtliche fachliche Einheit für die Landwirtschaft ist der landwirtschaftliche Betrieb,
- die unterstellte Bankgebühr (Zinsspanne der Kreditinstitute) wird in den Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen nicht den tatsächlichen Verbrauchern zugeordnet, sondern – aus Vereinfachungsgründen – global einer zu diesem Zweck in den Verwendungstabellen sowie Input-Output-Tabellen eingerichteten fiktiven Einheit als Vorleistungen zugerechnet. Da der Produktionswert dieser Einheit Null ist, ergibt sich ein negativer Betriebsüberschuss in Höhe der unterstellten Bankgebühr. Diese fiktive Einheit wird als Teil des Bereichs Kreditgewerbe [Nr. 46 in Tabelle 8.1.1] ausgewiesen. Die Vorleistungen dieses Bereichs sind um die unterstellte Bankgebühr (1995: 137,14 Mrd. DM) überhöht und die Bruttowertschöpfung und der Betriebsüberschuss entsprechend vermindert.

Die Gesamtheit aller homogenen Produktionseinheiten, die die Güter einer Gütergruppe erzeugen, wird als *Produktionsbereich* bezeichnet. Auch er ist folglich unter streng fachlichen Gesichtspunkten gebildet. Er produziert die Güter einer Gütergruppe, und zwar alle und nur diese.

[8] Eine begrifflich scharfe Unterscheidung ist aber kaum möglich; man vgl. z.B. H. Lützel (1987).

Tabelle 8.1.1 Gliederung in Produktionsbereiche bzw. Gütergruppen (1995).

1	Erzeugnisse der Landwirtschaft und Jagd
2	Forstwirtschaftliche Erzeugnisse und DL
3	Fische und Fischereierzeugnisse
4	Kohle und Torf
5	Erdöl, Erdgas; DL für Erdöl-, Erdgasgewinnung
6	Uran- und Thoriumerze
7	Erze
8	Steine und Erden, sonstige Bergbauerzeugnisse
9	Nahrungs- und Futtermittel, Getränke
10	Tabakerzeugnisse
11	Textilien
12	Bekleidung
13	Leder und Lederwaren
14	Holz; Holz-, Kork-, Flechtwaren (ohne Möbel)
15	Papier, Pappe und Waren daraus
16	Verlags- und Druckerzeugnisse, bespielte Ton-, Bild- und Datenträger
17	Kokereierzeugnisse, Mineralölerzeugnisse, Spalt- und Brutstoffe
18	Chemische Erzeugnisse
19	Gummi- und Kunststoffwaren
20	Glas, Keramik, bearbeitete Steine und Erden
21	Metalle und Halbzeug daraus
22	Metallerzeugnisse
23	Maschinen
24	Büromaschinen, Datenverarbeitungsgeräte und -einrichtungen
25	Geräte der Elektrizitätserzeugung, -verteilung u.ä.
26	Nachrichtentechnik, Rundfunk- und Fernsehgeräte, Elektron. Bauelemente
27	Medizin-, mess-, regelungstechn., optische Erzeugnisse; Uhren
28	Kraftwagen und Kraftwagenteile
29	Sonstige Fahrzeuge (Wasser-, Schienen-, Luftfahrzeuge u.a.)
30	Möbel, Schmuck, Musikinstrumente, Sportgeräte, Spielwaren u.ä.
31	Sekundärrohstoffe
32	Energie (Strom, Gas) und DL der Energieversorgung
33	Wasser und DL der Wasserversorgung
34	Bauarbeiten
35	Handelsleistungen mit Kfz; Rep. an Kfz; Tankleistungen
36	Handelsvermittlungs- und Großhandelsleistungen
37	Einzelhandelsleistungen; Reparatur an Gebrauchsgütern
38	Beherbergungs- und Gaststätten-DL
39	Landverkehrs- und Transportleistungen in Rohrfernleitungen
40	Schifffahrtsleistungen
41	Luftfahrtleistungen
42	DL bezüglich Hilfs- und Nebentätigkeiten für den Verkehr
43	Nachrichtenübermittlungs-DL
44	DL der Kreditinstitute
45	DL der Versicherungen (ohne Sozialversicherung)
46	DL des Kredit- und Versicherungshilfsgewerbes
47	DL des Grundstücks- und Wohnungswesens
48	DL der Vermietung beweglicher Sachen (ohne Personal)
49	DL der Datenverarbeitung und von Datenbanken
50	Forschungs- und Entwicklungsleistungen
51	Unternehmensbezogene DL
52	DL der öffentlichen Verwaltung, Verteidigung, Sozialversicherung
53	Erziehungs- und Unterrichts-DL
54	DL des Gesundheits-, Veterinär- und Sozialwesens
55	Abwasser-, Abfallbeseitigung- und sonst. Entsorgungsleistungen
56	DL von Interessenvertretungen, Kirchen u.ä.
57	Kultur-, Sport- und Unterhaltungs-DL
58	Sonstige DL
59	DL privater Haushalte

Der Gliederung der Produktionsbereiche liegt die Systematik der Produktionsbereiche in Input-Output-Rechnungen (SIO), Ausgabe 1995 zugrunde.[9] Die SIO 1995 ist von der WZ 93 abgeleitet und ermöglicht eine Zusammenführung von nach Wirtschaftszweigen gegliederten Ergebnissen mit Ergebnissen, die nach Güterklassifikationen gegliedert sind, wie z.B. dem Systematischen Güterverzeichnis für Produktionsstatistiken (GP), Ausgabe 1995. Wie die Wirtschaftsbereichsklassifikationen sind auch die Güterklassifikationen international harmonisiert. Während die WZ 93 aus der NACE Rev. 1 abgeleitet wurde, basiert die SIO 1995 auf der Statistischen Güterklassifikation in Verbindung mit den Wirtschaftszweigen in der Europäischen Wirtschaftsgemeinschaft (CPA). WZ 93 und SIO 1995 sind voll aufeinander abgestimmt. Die SIO 1995 weist auf jeder Aggregationsebene die charakteristischen Erzeugnisse der entsprechenden Wirtschaftsbereiche nach der WZ 93 aus.

Produktionsbereiche und *Gütergruppen* sind inhaltlich identisch. In dem einen Fall wird die Produktionstätigkeit, im anderen Fall das produzierte Gut bezeichnet."

Auf einige der in diesen Ausführungen angesprochenen Besonderheiten wird in späteren Abschnitten genauer eingegangen.

5. Schließlich sei auch darauf hingewiesen, dass es im Laufe der Zeit Veränderungen sowohl in der Anzahl als auch in der Abgrenzung und Definition der Produktionsbereiche bzw. Gütergruppen gegeben hat.[10]

a) In der ersten Tabelle für das Berichtsjahr 1965 wurden 49 Produktionsbereiche unterschieden.

b) In den Tabellen für die Berichtsjahre 1970 und 1974 wurden 60 Produktionsbereiche unterschieden. Informationen findet man in den entsprechenden Veröffentlichungen der Reihe 2 der Fachserie 18 sowie bei Mai (1974).

c) Mit dem Berichtsjahr 1978 erfolgte eine Umstellung auf 58 Produktionsbereiche, die im wesentlichen bis zum Berichtsjahr 1993 beibehalten wurde.[11]

d) Mit dem Berichtsjahr 1995 begann eine erneute Umstellung auf 59 Produktionsbereiche. Ab diesem Berichtsjahr werden die Input-Output-Tabellen auch auf der Grundlage des Europäischen Systems volkswirtschaftlicher Gesamtrechnungen (EVSG) erstellt und beziehen sich auf den Gebietsstand vom Oktober 1990. Darüber berichten Bleses und Stahmer (2000).

[9] [Die SIO wurde zum erstenmal 1968 eingeführt, man vgl. Mai (1973, S. 17).]

[10] Es ist schwierig, die Entwicklung der Konstruktion von Input-Output-Tabellen durch das Statistische Bundesamt auf kurze Weise darzustellen. Einige Hinweise auf Publikationen finden sich in der Box 8.1.1.

[11] In der FS 18, R. 2–1993, S. 26, heißt es: „Die Aggregationstiefe der hier veröffentlichten Tabellen ist jedoch so gehalten, daß keine systematikbedingten Unterschiede zu früheren Input-Output-Tabellen ab dem Berichtsjahr 1978 auftreten."

Box 8.1.1 Hinweise auf Publikationen des Statistischen Bundesamts.

a) Dokumentation von Input-Output-Tabellen in der Reihe 2 der Fachserie 18:

Berichtsjahr	Erscheinungsjahr	Gütergruppen	Gliederung
1965	1972	49	a
1970	1977	60	b
1974	1981	60	b
1978	1983	58	c
1980	1984	58	c
1982	1987	58	c
1984	1988	58	c
1986		58	c
1988		58	c
1990	1994	58	c
1993	1997	58	c
1995	2000	59	d

b) Eine erste Input-Output-Tabelle mit 35 Sektoren wurde bereits für das Berichtsjahr 1960 (später umgerechnet für 1959) im Auftrag des Statistischen Amts der Europäischen Gemeinschaften erstellt. Darüber berichten Bartels, Hanisch und Lauckner (1965). In einer auf 12 Bereiche aggregierten Form findet man die Daten bei Bleses und Stahmer (1994, S. 336 f.).

c) In einigen der in der Tabelle angegebenen Publikationen werden auch revidierte Ergebnisse für frühere Berichtsjahre angegeben. Z.B. enthält der Bericht für 1974 auch eine revidierte Tabelle für 1970, die die 1977 abgeschlossenen Revisionen der Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnung berücksichtigt; und der Bericht für 1990 enthält revidierte Tabellen für 1986 und 1988.

d) Weiterhin ist ein in der Reihe S. 12 der Fachserie 18 erschienenes Sonderheft zu erwähnen, in dem jährliche Input-Output-Tabellen für den Zeitraum 1970 bis 1986 veröffentlicht wurden. Darüber berichtet A. Braakmann (1990).

e) Schließlich ist auch auf Aufsätze in der Zeitschrift „Wirtschaft und Statistik" hinzuweisen. Einige werden in diesem Text zitiert. Eine Übersicht findet man in FS 18, R. 2–1995, S. 200 ff.

8.2 Die Bewertung von Güterströmen

1. Unabhängig vom Aggregationsniveau einer Input-Output-Tabelle werden in den Produktionsbereichen bzw. Gütergruppen stets eine große Anzahl unterschiedlicher Güter zusammengefasst. Für eine quantitative Erfassung sind deshalb Bewertungen erforderlich. Das Statistische Bundesamt verwendet mehrere Preiskonzepte, auf die im folgenden kurz eingegangen werden soll. Dabei wird zwischen Aufkommens- und Verwendungstabellen unterschieden.

2. Eine *Aufkommenstabelle* hat, in vereinfachter Darstellung, folgenden

Aufbau:[12]

Gütergruppe	Produktionswert	Importe	Gesamtaufkommen
c_1			
$\vdots$			
c_n			

Jede Zeile entspricht einem Produktionsbereich bzw. einer Gütergruppe. In der ersten Spalte finden sich ihre Bezeichnungen (wir verwenden wie in Kap. 6 die Symbole $c_1, \dots, c_n$). In der zweiten Spalte steht der Gesamtwert der im Inland produzierten Güter der jeweiligen Gruppe. Dann folgt der Gesamtwert der importierten Güter der jeweiligen Gruppe. Aus der Summe der Produktionswerte und der Importe wird schließlich das Gesamtaufkommen der jeweiligen Gütergruppe gebildet.

3. Zur Darstellung der Produktionswerte wurden bis zur Tabelle 1993 Ab-Werk-Preise, ab 1995 werden Herstellungspreise verwendet. Dazu heißt es in der FS 18, R. 2–1995, S. 12:

„Die Produktionswerte für die inländische Produktion werden in der Aufkommenstabelle zu *Herstellungspreisen* bewertet. Der Herstellungspreis ist der Betrag, den ein Produzent je Einheit der von ihm produzierten Waren und Dienstleistungen vom Käufer erhält ohne die auf die produzierten oder verkauften Güter zu zahlenden Steuern (ohne Gütersteuern), zuzüglich empfangener Subventionen, die auf die produzierten oder verkauften Güter gewährt werden (einschließlich Gütersubventionen). Vom Produzenten getrennt in Rechnung gestellte Transportkosten gehören nicht dazu. Dagegen zählen im Preis enthaltene Transportkosten zum Herstellungspreis, selbst wenn sie auf der Rechnung getrennt ausgewiesen werden.“

Den Zusammenhang der unterschiedlichen Preiskonzepte kann man sich anhand des folgenden Schemas verdeutlichen.[13]

	Anschaffungspreis (einschl. nichtabziehbarer Umsatzsteuer)
−	Wert der Handels- und Transportleistungen
−	Nichtabziehbare Umsatzsteuer
=	Ab-Werk-Preis (ohne Umsatzsteuer)
−	Produktionssteuern (ohne Umsatzsteuer)
+	Subventionen
=	Herstellungspreis

Einige spezielle Fragen betreffen die Erfassung und Bewertung von Dienstleistungen des Handels. Damit werden wir uns in einem späteren Abschnitt beschäftigen.

[12]FS 18, R. 2-1995, S. 10.

[13]FS 18, R. 2–1993, S. 21.

4. Zur Bewertung der Importe werden cif-Preise verwendet.[14] Dazu heißt es in der FS 18, R. 2–1995, S. 12:

„Für importierte Güter entspricht dem Herstellungspreiskonzept der cif-Preis. Die Importe in tiefer Gütergliederung sind in der Aufkommenstabelle zu cif-Preisen bewertet. Der cif-Preis ist der Wert einer an die Grenze des Einfuhrlandes gelieferten Ware oder der Wert einer/einem Gebietsansässigen erbrachten Dienstleistung vor der Zahlung eventueller Importabgaben. Etwaige Transport- oder Versicherungsleistungen sind im cif-Preis der importierten Waren enthalten, und zwar unabhängig davon, ob sie von Gebietsansässigen oder Gebietsfremden erbracht werden.“

Der Zusammenhang zwischen cif-Preisen und Anschaffungspreisen wird durch folgendes Schema deutlich (FS 18, R. 2–1995, S. 14):

	Anschaffungspreis (einschl. nichtabziehbarer Umsatzsteuer)
−	Nichtabziehbare Umsatzsteuer auf Importe
−	Importabgaben (ohne Einfuhrumsatzsteuer)
+	Importsubventionen
−	Wert der Handels- und Transportleistungen im Inland
=	cif-Preis

5. Im Unterschied zur Aufkommenstabelle zeigt die *Verwendungstabelle*, wie das Gesamtaufkommen (sowohl die im Inland produzierten als auch die importierten Güter) verwendet werden, wobei wiederum nach Produktionsbereichen bzw. Gütergruppen differenziert wird. Dabei wird unterschieden zwischen Verwendungen von Gütern in Form von Vorleistungen, Konsum, Investitionen und Exporten. Zur Bewertung dieser Güterströme gibt es in der FS 18, R. 2–1995 (S. 12 f.) folgende Erläuterungen:

„In der Verwendungstabelle werden die Käufe von Waren und Dienstleistungen zu *Anschaffungspreisen* bewertet. Der Anschaffungspreis ist der Preis, den der Käufer tatsächlich für die Güter zum Zeitpunkt des Kaufes bezahlt. Der Anschaffungspreis umschließt sämtliche Gütersteuern (jedoch ohne die abziehbare Umsatzsteuer) abzüglich Gütersubventionen. Der Anschaffungspreis gilt als Preis „frei Haus“, d.h. die grundsätzlich im Preis enthaltenen Handels- und Verkehrsleistungen sind stets eingerechnet. Bezieht z.B. ein Käufer eine Ware ab Fabrik und beauftragt ein anderes Unternehmen mit dem Transport, so wird bei der Ermittlung der Anschaffungspreise der Wert der Transportleistungen dem Preis ab Fabrik zugeschlagen. Damit soll erreicht werden, dass in den Tabellen gleiche Güter stets mit dem gleichen Wertansatz nachgewiesen werden. Im Wert importierter Güter sind beim Anschaffungspreiskonzept auch die im Inland erbrachten Handels- und Transportleistungen enthalten. Dagegen entspricht der Anschaffungspreis bei den Exporten nicht streng dem Käuferpreis, sondern dem Grenzübergangswert. Es wird also unterstellt, dass der Käufer in der übrigen

[14]‘cif’ ist eine Abkürzung für *cost, insurance and freight* und entspricht einer Variante international vereinbarter Handelsklauseln. Darüber informiert z.B. der Beitrag zum Stichwort ‘Handelsklauseln’ in der Brockhaus-Enzyklopädie.

Welt die Güter an der deutschen Grenze empfängt, und zwar zum *fob-Preis*.[15] Diese Wert enthält folgende Bestandteile:

- den Wert der Waren zu Herstellungspreisen,
- Verkehrs- und Verteilungsleistungen bis zur deutschen Ausfuhrgrenze, gegebenenfalls einschließlich der Kosten der Verladung auf ein Beförderungsmittel für den Weitertransport,
- Gütersteuern abzüglich Gütersubventionen auf die exportierten Waren.

Um die Identitätsbeziehung zwischen Aufkommen und Verwendung herzustellen, weist die Aufkommenstabelle auch den Übergang vom Aufkommen zu Herstellungspreisen zum Aufkommen zu Anschaffungspreisen aus. Der Übergang erfolgt in zwei Spalten. Zunächst werden die Gütersteuern abzüglich Gütersubventionen zum Aufkommen zu Herstellungspreisen hinzu addiert, ferner werden die Handels- und Transportleistungen aus den entsprechenden Dienstleistungsbereichen auf die Waren, die gehandelt oder transportiert werden, umgebucht. Das so ermittelte gesamte Aufkommen an Gütern zu Anschaffungspreisen in der Aufkommenstabelle ist dann identisch mit der gesamten Verwendung von Gütern zu Anschaffungspreisen in der Verwendungstabelle.“

In späteren Abschnitten wird die Verwendung der unterschiedlichen Preiskonzepte anhand von Beispielen näher erläutert.

[15] [Wiederum eine Abkürzung für eine Handelsklausel: *free on board*. Dazu heißt es in der Brockhaus-Enzyklopädie: „Die Lieferverpflichtung des Verkäufers ist erfüllt, wenn die Ware die Schiffsreling in dem benannten Verschiffungshafen überschritten hat. Der Käufer hat von diesem Zeitpunkt an alle Kosten und Gefahren des Verlusts oder der Beschädigung der Ware zu tragen. Der Verkäufer wird verpflichtet, die Ware zur Ausfuhr freizumachen.“

8.3 Aufbau von Input-Output-Tabellen

In den folgenden Abschnitten wird der Aufbau von Input-Output-Tabellen näher erläutert. Dabei orientieren wir uns wie bisher an der Input-Output-Tabelle des Statistischen Bundesamts für das Berichtsjahr 1995. Um die Übersicht zu bewahren und spätere Berechnungen vorzubereiten, werden auch einige symbolische Notationen eingeführt.

8.3.1 Vorleistungen und Importe

1. Ziel der Aufstellung von Input-Output-Tabellen ist es, ein Bild der Güterströme zu gewinnen, die in einer Ökonomie während eines gewissen Zeitraums stattfinden, und dabei zu berücksichtigen, dass ein Teil dieser Güterströme Vorleistungen zur Produktion neuer Güter repräsentiert. Im Mittelpunkt jeder Input-Output-Tabelle steht deshalb die Verflechtung der Vorleistungen. Eine gewisse Komplikation ergibt sich daraus, dass in Input-Output-Tabellen außer der inländischen Produktion auch Importe und Exporte zu berücksichtigen sind. Wir definieren deshalb zwei unterschiedliche Arten von Koeffizienten:

a_{ij}	Güter der Gütergruppe i aus inländischer Produktion, die im Produktionsbereich j verwendet werden.
b_{ij}	Güter der Gütergruppe i aus Importen, die im Produktionsbereich j verwendet werden.

Weiterhin definieren wir:

$$a^*_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$$

a^*_{ij} ist also die Gesamtheit der Güter der Gütergruppe i, unabhängig von ihrer Herkunft, die im Produktionsbereich j, d.h. zur Herstellung von Gütern der Gütergruppe j, verwendet werden (wobei stets eine bestimmte Zeitperiode als gegeben vorausgesetzt wird).

2. Dementsprechend können zwei unterschiedliche Arten von Input-Output-Tabellen aufgestellt werden. Die erste Variante verwendet eine Vorleistungsmatrix $\mathbf{A}$, die zweite eine Vorleistungsmatrix $\mathbf{A}^*$:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}^* := \begin{pmatrix} a^*_{11} & \cdots & a^*_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a^*_{n1} & \cdots & a^*_{nn} \end{pmatrix}$$

Im folgenden unterscheiden wir:

A-Tabellen, wenn von einer Vorleistungsmatrix $\mathbf{A}$ ausgegangen wird, deren Koeffizienten keine Importe enthalten;

Tabelle 8.3.1 Zusammenhang zwischen den Koeffizienten a_{ij} und a^*_{ij} (in Herstellungspreisen) und b_{ij} (in cif-Preisen) am Beispiel der Gütergruppe 1 (landwirtschaftliche Produkte). Angaben in Mio. DM. Input-Output-Tabelle des Statistischen Bundesamts für 1995.

i	a_{i1}	b_{i1}	a^*_{i1}	i	a_{i1}	b_{i1}	a^*_{i1}	i	a_{i1}	b_{i1}	a^*_{i1}
1	1951	211	2162	21	28	27	55	41	15	5	20
2	97	8	105	22	536	140	676	42	38	0	38
3	0	0	0	23	1309	322	1631	43	111	5	116
4	119	33	152	24	21	0	21	44	96	2	98
5	16	35	51	25	109	26	135	45	433	0	433
6	0	0	0	26	0	0	0	46	0	0	0
7	0	0	0	27	6	1	7	47	82	0	82
8	444	208	652	28	137	38	175	48	3867	165	4032
9	6408	847	7255	29	0	0	0	49	10	0	10
10	0	0	0	30	2	2	4	50	0	0	0
11	34	31	65	31	0	0	0	51	2068	5	2073
12	1	0	1	32	1251	19	1270	52	200	0	200
13	22	17	39	33	502	0	502	53	0	0	0
14	96	53	149	34	715	4	719	54	1674	0	1674
15	38	23	61	35	554	0	554	55	431	4	435
16	93	2	95	36	5241	97	5338	56	107	0	107
17	640	97	737	37	165	0	165	57	0	0	0
18	2227	2704	4931	38	23	1	24	58	182	0	182
19	143	212	355	39	814	95	909	59	0	0	0
20	972	92	1064	40	76	36	112				

A*-Tabellen, wenn von einer Vorleistungsmatrix $\mathbf{A}^*$ ausgegangen wird, deren Koeffizienten Importe umfassen.

3. Das Statistische Bundesamt erstellt sowohl A- als auch A*-Tabellen.[16] Sie enthalten allerdings nicht nur die Vorleistungsmatrizen $\mathbf{A}$ bzw. $\mathbf{A}^*$, sondern noch zahlreiche weitere Zeilen und Spalten, in denen die Entstehung und Verwendung der Güterproduktion dargestellt wird. Darauf wird in den folgenden Abschnitten näher eingegangen. Zuvor soll die Unterscheidung der beiden Arten von Koeffizienten anhand der Input-Output-Tabelle 1995 des Statistischen Bundesamts illustriert werden. Tabelle 8.3.1 zeigt die Koeffizienten für den Bereich der landwirtschaftlichen Güter. Man kann daraus z.B. ersehen, dass für die Produktion dieser Güter Vorleistungen in Höhe von 4931 Mio. DM aus dem Bereich 18 (chemische Erzeugnisse) eingesetzt worden sind, davon 2227 Mio. DM für inländische, 2704 Mio. DM für importierte Erzeugnisse.

[16] A-Tabellen werden oft durch den Hinweis „inländische Produktion", A*-Tabellen durch den Hinweis „inländische Produktion und Einfuhr" kenntlich gemacht.

8.3.2 Buchführung über die Wertschöpfung

1. In diesem Abschnitt wird die Darstellung der Entstehungsseite besprochen. Zunächst wird auf die A-Tabelle Bezug genommen. Box 8.3.1 informiert über die Zeilen. Zur Erläuterung können die in Tabelle 8.3.2 angeführten Angaben über die acht ersten Produktionsbereiche dienen. Die ersten 59 Zeilen gehören zur Vorleistungsmatrix $\mathbf{A}$. Dann folgt Zeile 60, die die Summe der Vorleistungen enthält, also die Summe der Einträge in den Zeilen 1 – 59. Hierin sind jedoch nur Vorleistungen aus inländischer Produktion enthalten, deshalb wird in der nächsten Zeile 61 die Summe der Vorleistungen aus Importen angeführt. In unserem Beispiel werden also für die Produktion landwirtschaftlicher Güter insgesamt 34104 Mio. DM Vorleistungen aus inländischer Produktion und 5567 Mio. DM Vorleistungen aus Importen eingesetzt.

2. Aus diesen beiden Positionen wird die Summe der Vorleistungen zu Anschaffungspreisen berechnet, indem Gütersteuern hinzugefügt und Gütersubventionen abgezogen werden. In schematischer Darstellung:

	Vorleistungen aus inländischer Produktion	34104	(60)
+	Vorleistungen aus Importen	5567	(61)
+	Gütersteuern abzüglich Gütersubventionen	1958	(62)
=	Vorleistungen zu Anschaffungspreisen	41629	(63)

Im nächsten Schritt wird die Bruttowertschöpfung berechnet, in schematischer Darstellung:

	Arbeitnehmerentgelte im Inland	15745	(64)
+	Sonstige Produktionsabgaben abzüglich sonstige Subventionen	-4121	(65)
+	Betriebsüberschuß (brutto)	28081	(66)
=	Bruttowertschöpfung	39705	(67)

Schließlich wird aus der Summe der Vorleistungen zu Anschaffungspreisen und der Bruttowertschöpfung der Produktionswert gebildet:

	Vorleistungen zu Anschaffungspreisen	41629	(63)
+	Bruttowertschöpfung	39705	(67)
=	Produktionswert	81334	(68)

3. Im Unterschied zur A-Tabelle hat die A*-Tabelle 70 Zeilen. Box 8.3.2 informiert über ihre Bedeutung. Die ersten 59 Zeilen beziehen sich auf die Vorleistungsmatrix $\mathbf{A}^*$, dann folgt wie in der A-Tabelle die Summe der Vorleistungen, diesmal jedoch die Summe der a^*_{ij}-Koeffizienten, die die importierten Vorleistungen enthalten. Durch Hinzufügen der Gütersteuern und

Box 8.3.1 Zeilen in der A-Tabelle 1995 des Statistischen Bundesamts.

Zeile	Symbol	Beschreibung
1 – 59	a_{ij}	Produktionsbereiche
60	u_{0j}	Summe der Vorleistungen aus inländischer Produktion
61	u_{1j}	Summe der Vorleistungen aus Importen
62	u_{2j}	Gütersteuern abzüglich Gütersubventionen
63	u_{3j}	Summe der Vorleistungen zu Anschaffungspreisen
64	u_{4j}	Arbeitnehmerentgelt im Inland
65	u_{5j}	Sonst. Produktionsabgaben abzügl. sonst. Subventionen
66	u_{6j}	Betriebsüberschuß (brutto)
67	u_{7j}	Bruttowertschöpfung
68	u_{8j}	Produktionswert

Box 8.3.2 Zeilen in der A*-Tabelle 1995 des Statistischen Bundesamts.

Zeile	Symbol	Beschreibung
1 – 59	a^*_{ij}	Produktionsbereiche
60	u^*_{0j}	Summe der Vorleistungen
61	u^*_{1j}	Gütersteuern abzüglich Gütersubventionen
62	u^*_{2j}	Summe der Vorleistungen zu Anschaffungspreisen
63	u^*_{3j}	Arbeitnehmerentgelt im Inland
64	u^*_{4j}	Sonst. Produktionsabgaben abzügl. sonst. Subventionen
65	u^*_{5j}	Betriebsüberschuß (brutto)
66	u^*_{6j}	Bruttowertschöpfung
67	u^*_{7j}	Produktionswert
68	u^*_{8j}	Importe gleichartiger Güter (cif-Preise)
69		darunter aus EU-Ländern
70	u^*_{9j}	Gesamtaufkommen an Gütern

Box 8.3.3 Gleichungen für die Zeilen der Input-Output-Tabelle.

$$
\begin{aligned}
u_{0j} &= \textstyle\sum_{i=1}^{59} a_{ij} & \qquad u^*_{0j} &= \textstyle\sum_{i=1}^{59} a^*_{ij} \\
u_{3j} &= u_{0j} + u_{1j} + u_{2j} & u^*_{2j} &= u^*_{0j} + u^*_{1j} \\
u_{7j} &= u_{4j} + u_{5j} + u_{6j} & u^*_{6j} &= u^*_{3j} + u^*_{4j} + u_{5j} \\
u_{8j} &= u_{3j} + u_{7j} & u^*_{7j} &= u^*_{2j} + u^*_{6j} \\
 & & u^*_{9j} &= u^*_{7j} + u^*_{8j}
\end{aligned}
$$

$$u_{2j} = u^*_{1j} \quad u_{3j} = u^*_{2j} \quad u_{4j} = u^*_{3j} \quad u_{5j} = u^*_{4j}$$

$$u_{6j} = u^*_{5j} \quad u_{7j} = u^*_{6j} \quad u_{8j} = u^*_{7j}$$

Tabelle 8.3.2 Auszug aus der A-Tabelle 1995 des Statistischen Bundesamts. Herstellungspreise in Mio. DM.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1951	50	0	52	0	0	0	0
2	97	107	0	5	9	0	5	26
⋮								
58	182	5	2	83	327	0	121	56
59	0	0	0	0	0	0	0	0
60	34104	1332	214	9608	2848	0	427	6340
61	5567	301	59	1139	245	0	52	1075
62	1958	47	7	110	13	0	1	483
63	41629	1680	280	10857	3106	0	480	7898
64	15745	2120	160	10851	536	0	27	2922
65	-4121	-30	0	-3074	100	0	9	223
66	28081	151	180	748	1385	0	-85	913
67	39705	2241	340	8525	2021	0	-49	4058
68	81334	3921	620	19382	5127	0	431	11956

Abzug der Gütersubventionen entsteht die Summe der Vorleistungen zu Anschaffungspreisen. Dies entspricht der Vorgehensweise in der A-Tabelle, so dass die Summe der Vorleistungen zu Anschaffungspreisen in beiden Tabellen identisch ist. Dies zeigt auch ein Vergleich von Tabelle 8.3.2 mit Tabelle 8.3.3, in der ein entsprechender Auszug aus der A*-Tabelle dargestellt ist.

4. Ebenfalls analog verläuft die Berechnung der Bruttowertschöpfung aus der Summe der Arbeitnehmerentgelte im Inland, der sonstigen Produktionsabgaben abzüglich der sonstigen Subventionen und des Betriebsüberschusses. Somit ist auch der Produktionswert in beiden Tabellen identisch. Nur bei der Verbuchung der Importe gibt es eine Besonderheit, auf die man achten muss. Denn einerseits enthalten die a^*_{ij}-Koeffizienten bereits einen Teil der importierten Vorleistungen; andererseits werden in Zeile 68 die *gesamten* Importe der jeweiligen Gütergruppe ausgewiesen. Z.B. besagt die Zahl 29629 Mio. DM in Spalte 1 der Tabelle 8.3.3, dass in diesem Umfang landwirtschaftliche Güter importiert wurden.

5. Ein gewisses Problem entsteht somit bei der Berechnung des *Gesamten Aufkommens an Gütern* in Zeile 70. Die Berechnung erfolgt, indem der Produktionswert und die insgesamt importierten Güter addiert werden, in unserem Beispiel:

Tabelle 8.3.3 Auszug aus der A*-Tabelle 1995 des Statistischen Bundesamts. Herstellungspreise in Mio. DM.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2162	78	0	52	0	0	0	0
2	105	251	0	5	10	0	5	28
⋮								
58	182	5	2	83	327	0	121	56
59	0	0	0	0	0	0	0	0
60	39671	1633	273	10747	3093	0	479	7415
61	1958	47	7	110	13	0	1	483
62	41629	1680	280	10857	3106	0	480	7898
63	15745	2120	160	10851	536	0	27	2922
64	-4121	-30	0	-3074	100	0	9	223
65	28081	151	180	748	1385	0	-85	913
66	39705	2241	340	8525	2021	0	-49	4058
67	81334	3921	620	19382	5127	0	431	11956
68	29629	778	906	1446	28687	0	3778	2417
69	14693	330	330	214	7891	0	505	1178
70	110963	4699	1526	20828	33814	0	4209	14373

	Produktionswert	81334	(67)
+	Importe gleichartiger Güter (cif-Preise)	29629	(68)
=	Gesamtes Aufkommen an Gütern	110963	(70)

In Abschnitt 8.3.4 wird auf die unterschiedliche Buchung der Importe noch einmal anhand einer separaten Importtabelle eingegangen.

6. Um nicht die Übersicht zu verlieren, ist es nützlich, symbolische Bezeichnungen für die Zeilen der Input-Output-Tabelle zu vereinbaren. Wir verwenden die in den Boxen 8.3.1 und 8.3.2 angegebenen Symbole. Dann ergeben sich aus den Buchführungsregeln die in Box 8.3.3 dargestellten Gleichungen, jeweils für die A- und die A*-Tabelle. Außerdem wird angegeben, welche Zeilen der beiden Tabellen einander entsprechen.

8.3.3 Darstellung der Güterverwendung

1. Im vorangegangenen Abschnitt wurde dargestellt, wie in den Input-Output-Tabellen des Statistischen Bundesamts über Kosten und Wertschöpfung der Güterproduktion Buch geführt wird. In diesem Abschnitt wird erklärt, wie in den Tabellen die Verwendung der produzierten bzw. importierten Güter dargestellt wird. Zur Illustration wird wiederum auf die Input-Output-Tabelle für das Jahr 1995 Bezug genommen. Wir beginnen mit der A-Tabelle. In schematischer Darstellung hat sie folgenden Aufbau:

	1 … 59	60 61 62 63 64 65 66 67 68 69
1 ⋮ 59	**A**	v
60 61 62 63 64 65 66 67 68	u	frei

Im ersten Quadranten befindet sich die Matrix **A**, die die Vorleistungsverflechtungen erfasst. Unterhalb befindet sich in den Zeilen 60 – 68 und den Spalten 1 – 59 der dritte Quadrant, der im vorangegangenen Abschnitt besprochen wurde. Im folgenden wird der zweite Quadrant erklärt, der sich rechts neben der Vorleistungsmatrix in den Zeilen 1 – 59 und den Spalten 60 – 69 befindet. Auf den vierten Quadranten wird nicht näher eingegangen, da seine Elemente überwiegend nicht besetzt sind.[17]

2. Box 8.3.4 informiert über die Einträge, die sich in den Spalten der A-Tabelle befinden. Zur Illustration zeigt Tabelle 8.3.4 den entsprechenden Ausschnitt der Tabelle. Spalte 60 enthält die Summe der Vorleistungen, also die Summe der Einträge in den Spalten 1 – 59. In den weiteren Spalten wird über die Verwendung der produzierten und importierten Güter Buch geführt. Folgendes Schema zeigt den Zusammenhang der Einträge am Beispiel des Produktionsbereichs 1 (landwirtschaftliche Güter):

[17] In den Tabellen des Statistischen Bundesamtes gibt es auch in einigen Zeilen und Spalten dieses vierten Quadranten Einträge. Sie liefern jedoch keine neuen Informationen, da sie aus den Einträgen in den ersten drei Quadranten berechenbar sind.

Box 8.3.4 Spalten der A-Tabelle 1995 des Statistischen Bundesamts.

Spalte	Symbol	Beschreibung
1 – 59	a_{ij}	Produktionsbereiche
60	v_{0j}	Summe der Vorleistungen (Spalten 1 – 59)
61	v_{1j}	Konsum der privaten Haushalte
62	v_{2j}	Konsum privater Organisationen ohne Erwerbscharakter
63	v_{3j}	Konsum des Staates
64	v_{4j}	Investitionen: Ausrüstungen und Anlagen
65	v_{5j}	Investitionen: Bauten
66	v_{6j}	Vorratsveränderungen und Nettozugang an Wertsachen
67	v_{7j}	Exporte
68	v_{8j}	Letzte Verwendung von Gütern
69	v_{9j}	Gesamte Verwendung von Gütern

	Konsum der privaten Haushalte	15028	(61)
+	Konsum privater Organisationen	0	(62)
+	Konsum des Staates	0	(63)
+	Investitionen: Ausrüstungen und Anlagen	0	(64)
+	Investitionen: Bauten	5818	(65)
+	Vorratsveränderungen	130	(66)
+	Exporte	6645	(67)
=	Letzte Verwendung von Gütern	27621	(68)

Die *Letzte Verwendung von Gütern* umfasst also die gesamte Verwendung von Gütern, sowohl der im Inland produzierten als auch der importierten Güter, soweit diese nicht in Form von Vorleistungen eingesetzt werden. Addiert man hierzu die Summe der im Inland produzierten und importierten Vorleistungen (Spalte 60), enthält man die *Gesamte Verwendung von Gütern*:

	Summe der Vorleistungen	53713	(60)
+	Letzte Verwendung von Gütern	27621	(68)
=	Gesamte Verwendung von Gütern	81334	(69)

In der A-Tabelle ist also die Gesamte Verwendung von Gütern mit dem Produktionswert identisch ($v_{9j} = u_{8j}$).

Tabelle 8.3.4 Auszug aus der A-Tabelle 1995 des Statistischen Bundesamts. Herstellungspreise in Mio. DM.

	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
1	53713	15028	0	0	0	5818	130	6645	27621	81334
2	2596	1058	0	0	0	0	-120	387	1325	3921
3	275	35	0	0	0	0	40	270	345	620
4	17352	949	0	0	0	0	466	615	2030	19382
5	3077	1812	0	0	220	0	-221	239	2050	5127
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	380	0	0	0	0	0	0	51	51	431
8	10762	82	0	0	0	0	-67	1179	1194	11956
9	71212	130989	0	0	0	0	704	27943	159636	230848
10	1893	5938	0	0	0	0	429	1594	7961	9854
11	11778	6481	0	0	246	0	432	13821	20980	32758
12	1290	16408	0	0	12	0	443	4023	20886	22176
13	1230	3244	0	0	0	0	128	2204	5576	6806
14	35624	1191	0	0	382	4604	133	3055	9365	44989
15	27041	3448	0	0	0	0	-413	16840	19875	46916
16	53754	25364	0	0	1711	0	-1678	8831	34228	87982
17	23693	11546	0	0	0	0	887	4227	16660	40353
18	78695	14017	0	0	0	0	300	90158	104475	183170
19	56198	4334	0	0	288	595	600	22693	28510	84708
20	63968	5530	0	0	222	630	-108	9729	16003	79971
21	55913	0	0	0	388	1345	-1349	42696	43080	98993
22	104881	5105	0	0	6358	15822	709	23950	51944	156825
23	71018	8927	0	0	58223	3214	2806	111285	184455	255473
24	9843	860	0	0	4329	0	-620	6356	10925	20768
25	71949	1055	0	0	12939	2335	-151	33542	49720	121669
26	11038	2712	0	0	13334	0	-192	19170	35024	46062
27	18214	3542	0	0	10524	0	164	20771	35001	53215
28	48760	50698	0	0	21739	0	1997	116818	191252	240012
29	4555	1936	0	0	7370	190	-3347	20190	26339	30894
30	7645	26077	0	0	10756	176	-97	10829	47741	55386
31	2799	0	0	0	0	0	0	0	0	2799
32	65175	42383	0	0	0	0	0	728	43111	108286
33	6231	7148	0	0	0	0	0	0	7148	13379
34	98471	6689	0	0	0	374898	0	292	381879	480350
35	23241	57449	0	0	6921	0	0	1886	66256	89497
36	160867	59794	0	0	13351	0	0	40169	113314	274181
37	31239	210359	0	0	2123	0	0	280	212762	244001
38	15207	89296	0	0	0	0	0	4503	93799	109006
39	33233	47821	0	0	5246	45	0	16556	69668	102901
40	2802	688	0	0	0	0	0	10036	10724	13526
41	7490	12289	0	0	0	0	0	6296	18585	26075
42	72392	14488	0	5210	0	0	0	7284	26982	99374
43	54761	39883	0	0	0	0	0	3049	42932	97693
44	162669	9508	0	0	0	0	0	201	9709	172378
45	30534	55906	0	0	0	0	0	2010	57916	88450
46	26501	485	0	0	0	0	0	1054	1539	28040
47	182502	329095	0	0	0	8000	0	851	337946	520448
48	69135	8378	0	0	0	0	0	1141	9519	78654
49	31560	122	0	0	21842	0	0	3018	24982	56542
50	5117	0	4367	11480	0	0	0	5399	21246	26363
51	336963	12583	0	0	1610	26784	0	12940	53917	390880
52	25672	6228	0	525460	0	2900	0	810	535398	561070
53	5962	17633	14656	129350	0	0	0	0	161639	167601
54	205100	64448	16379	7200	0	0	0	0	88027	293127
55	28501	18149	0	0	0	0	0	2222	20371	48872
56	14294	3056	17808	0	0	0	0	0	20864	35158
57	30872	34344	2770	19120	3912	0	0	923	61069	91941
58	27225	32365	0	0	0	0	0	39	32404	59629
59	0	4050	0	0	0	0	0	0	4050	4050

Box 8.3.5 Spalten der A*-Tabelle 1995 des Statistischen Bundesamts.

Spalte	Symbol	Beschreibung
1 – 59	a_{ij}	Produktionsbereiche
60	v^*_{0j}	Summe der Vorleistungen (1 – 59)
61	v^*_{1j}	Konsum privater Haushalte
62	v^*_{2j}	Konsum privater Organiationen ohne Erwerbscharakter
63	v^*_{3j}	Konsum des Staates
64	v^*_{4j}	Investitionen: Ausrüstungen und sonstige Anlagen
65	v^*_{5j}	Investitionen: Bauten
66	v^*_{6j}	Vorratsveränderungen und Nettozugang an Wertsachen
67	v^*_{7j}	Exporte
68		darunter: Exporte in EU-Länder
69	v^*_{8j}	Gesamter Verbrauch (61 – 67)
70	v^*_{9j}	Gesamte Verwendung von Gütern

3. Im Unterschied zur A-Tabelle hat die A*-Tabelle 70 Zeilen und 70 Spalten, in schematischer Darstellung:

	1 ⋯ 59	60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70
1 ⋮ 59	$\mathbf{A}^*$	v^*
60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70	u^*	frei

Im ersten Quadranten befindet sich jetzt die Matrix $\mathbf{A}^*$, die die Vorleistungsverflechtungen erfasst, wobei Vorleistungen aus inländischer Produktion und Importen zusammengefasst sind. Die weiteren Zeilen wurden im vorangegangenen Abschnitt erläutert. Die Bedeutung der Spalten 60 – 70 wird in Box 8.3.5 erklärt; Tabelle 8.3.5 zeigt den entsprechenden Aussschnitt aus der Input-Output-Tabelle.

4. In Spalte 60 befindet sich wiederum die Summe der Vorleistungen, also die Summe der Einträge in den Spalten 1 – 59. Dann wird wie in der A-Tabelle über die Verwendung Buch geführt (die Zahlen beziehen sich auf die Produktion landwirtschaftlicher Güter):

Tabelle 8.3.5 Auszug aus der A*-Tabelle 1995 des Statistischen Bundesamts. Herstellungspreise in Mio. DM.

	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
1	71940	25133	0	0	0	5818	191	7881	4898	39023	110963
2	3202	1159	0	0	0	0	-120	458	374	1497	4699
3	970	174	0	0	0	0	40	342	323	556	1526
4	18662	1070	0	0	0	0	466	630	585	2166	20828
5	27244	5885	0	0	220	0	-66	531	442	6570	33814
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	4141	0	0	0	0	0	3	65	62	68	4209
8	13023	98	0	0	0	0	-67	1319	975	1350	14373
9	89584	154222	0	0	0	0	386	30395	21682	185003	274587
10	1933	6619	0	0	0	0	524	1767	1052	8910	10843
11	21727	14906	0	0	635	0	612	18564	9325	34717	56444
12	4589	37775	0	0	12	0	1060	9111	6109	47958	52547
13	3014	10413	0	0	0	0	329	3686	1804	14428	17442
14	43762	1622	0	0	428	5171	149	3408	2398	10778	54540
15	44438	4474	0	0	0	0	-413	18335	12879	22396	66834
16	56951	27807	0	0	1711	0	-1678	9386	5255	37226	94177
17	32446	15767	0	0	0	0	1163	4371	2456	21301	53747
18	136410	19536	0	0	0	0	502	96962	57636	117000	253410
19	70697	7005	0	0	407	693	649	24528	16448	33282	103979
20	74184	6997	0	0	222	650	-97	10532	6638	18304	92488
21	100810	0	0	0	388	2623	-991	45639	29958	47659	148469
22	116708	6368	0	0	7535	18419	709	25889	15796	58920	175628
23	90951	13116	0	0	76623	4127	478	119172	54263	213516	304467
24	16781	2857	0	0	19447	0	-620	15378	10760	37062	53843
25	87418	1981	0	0	16493	3435	-125	40769	23844	62553	149971
26	25278	9202	0	0	19114	0	73	27638	16041	56027	81305
27	23773	5616	0	0	16548	0	218	25118	12056	47500	71273
28	69762	70515	0	0	36426	0	7559	122297	74304	236797	306559
29	12066	4556	0	0	10260	199	-3347	26393	15686	38061	50127
30	11155	36970	0	0	13684	215	-97	12783	7422	63555	74710
31	2799	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2799
32	66018	42832	0	0	0	0	0	728	565	43560	109578
33	6231	7148	0	0	0	0	0	0	0	7148	13379
34	102005	6689	0	0	0	376988	0	292	113	383969	485974
35	23241	57449	0	0	6921	0	0	1886	1230	66256	89497
36	168143	59794	0	0	13351	0	0	40169	20816	113314	281457
37	31239	210502	0	0	2123	0	0	298	38	212923	244162
38	16167	92191	0	0	0	0	0	4503	2893	96694	112861
39	38193	51017	0	0	5760	62	0	16556	10729	73395	111588
40	4317	735	0	0	0	0	0	10036	3345	10771	15088
41	9548	14450	0	0	0	0	0	6296	2287	20746	30294
42	79269	14536	0	5210	0	0	0	7284	4103	27030	106299
43	59132	42078	0	0	0	0	0	3049	1504	45127	104259
44	163246	9729	0	0	0	0	0	201	83	9930	173176
45	32739	55906	0	0	0	0	0	2010	1195	57916	90655
46	33515	711	0	0	0	0	0	1054	679	1765	35280
47	186952	329095	0	0	0	8000	0	851	166	337946	524898
48	71295	8385	0	0	0	0	0	1141	514	9526	80821
49	33037	134	0	0	22480	0	0	3018	1713	25632	58669
50	9476	0	4367	11480	0	0	0	5399	3697	21246	30722
51	344391	12624	0	0	1610	27470	0	12947	6866	54651	399042
52	27563	6228	0	525460	0	2900	0	810	808	535398	562961
53	5962	17633	14656	129350	0	0	0	0	0	161639	167601
54	205100	64448	16379	7200	0	0	0	0	0	88027	293127
55	31079	19950	0	0	0	0	0	2222	1000	22172	53251
56	14294	3056	17808	0	0	0	0	0	0	20864	35158
57	33207	35722	2770	19120	3912	0	0	974	246	62498	95705
58	27533	32365	0	0	0	0	0	39	2	32404	59937
59	0	4050	0	0	0	0	0	0	0	4050	4050

	Konsum der privaten Haushalte	25133	(61)
+	Konsum privater Organisationen	0	(62)
+	Konsum des Staates	0	(63)
+	Investitionen: Ausrüstungen und Anlagen	0	(64)
+	Investitionen: Bauten	5818	(65)
+	Vorratsveränderungen	191	(66)
+	Exporte	7881	(67)
=	Gesamter Verbrauch	39023	(69)

Addiert man zum Gesamten Verbrauch die Summe der Vorleistungen (Spalte 60), enthält man die *Gesamte Verwendung von Gütern*:

	Summe der Vorleistungen	71940	(60)
+	Gesamter Verbrauch	39023	(69)
=	Gesamte Verwendung von Gütern	110963	(70)

Bei der A^*-Tabelle ist also die Gesamte Verwendung von Gütern nicht mit dem Produktionswert identisch, sondern umfasst zusätzlich die importierten Güter (in unserem Beispiel 29629 Mio. DM).

Box 8.3.6 Spalten in der Importtabelle 1995 des Statistischen Bundesamts.

Zeile	Symbol	Beschreibung
1 – 59	b_{ij}	Produktionsbereiche
60	w_{0j}	Summe der importierten Vorleistungen
61	w_{1j}	Konsum privater Haushalte
62	w_{2j}	Konsum privater Organisationen ohne Erwerbscharakter
63	w_{3j}	Konsum des Staates
64	w_{4j}	Investitionen: Ausrüstungen und sonstige Anlagen
65	w_{5j}	Investitionen: Bauten
66	w_{6j}	Vorratsveränderung und Nettozugang an Wertsachen
67	w_{7j}	Exporte
68	w_{8j}	Zusammen (61 – 67)
69	u_{9j}	Gesamte Verwendung der importierten Güter

8.3.4 Aufbau der Importtabelle

1. In diesem Abschnitt soll noch einmal etwas genauer auf die unterschiedliche Buchführung über Importe eingegangen werden. Als Hilfsmittel dient eine dritte Tabelle, die *Importtabelle*, in der die Art und Verwendung der Importe in differenzierter Form nach den unterschiedlichen Gütergruppen dargestellt wird. Die Erläuterungen orientieren sich wiederum an der Input-Output-Tabelle 1995 des Statistischen Bundesamts.

2. Die Importtabelle hat 60 Zeilen und 69 Spalten. Das folgende Schema verdeutlicht den Aufbau:

	1 · · · 59	60 61 62 63 64 65 66 67 68 69
1 ⋮ 59	**B**	w
60		

Die Zeilen 1 – 59 entsprechen den Gütergruppen, so dass sich im ersten Quadranten die Matrix $\mathbf{B} = (b_{ij})$ befindet, deren Koeffizienten bereits in Abschnitt 8.3.1 erklärt wurden: b_{ij} erfasst die Menge der importierten Güter der Gruppe i, die im Produktionsbereich j als Vorleistungen verwendet werden.[18]

3. Die Bedeutung der Spalten 60 – 69 wird in Box 8.3.6 erklärt. Spalte 69 zeigt die gesamten Importe der jeweiligen Gütergruppe. Z.B. erkennt man aus Tabelle 8.3.6, dass 1995 insgesamt landwirtschaftliche Güter im Wert von 29629 Mio. DM importiert wurden. Die weiteren Spalten zeigen,

[18] Sie werden in cif-Preisen ausgewiesen, vgl. Abschnitt 8.2.

wie die Importe verwendet wurden. Der als Vorleistungen verwendete Teil wird in Spalte 60 dargestellt. Z.B. wurden 18227 Mio. DM der importierten landwirtschaftlichen Güter als Vorleistungen (von der Gesamtheit der Produktionsbereiche) verwendet. Die weitere Aufgliederung der Verwendung entspricht im wesentlichen den bereits aus den A- und A*-Tabellen bekannten Unterscheidungen. Hier noch einmal der Zusammenhang in Form einer schematischen Darstellung, wobei sich die Zahlen auf den Produktionsbereich 1 (landwirtschaftliche Güter) beziehen:

	Konsum der privaten Haushalte	10105	(61)
+	Konsum privater Organisationen	0	(62)
+	Konsum des Staates	0	(63)
+	Investitionen: Ausrüstungen und Anlagen	0	(64)
+	Investitionen: Bauten	0	(65)
+	Vorratsveränderungen	61	(66)
+	Exporte	1236	(67)
=	Zusammen (Verbrauch ohne Vorleistungen)	11402	(68)

Die Summe der Spalten 60 und 68 liefert schließlich den Eintrag in Spalte 69, d.h. die *Gesamte Verwendung der importierten Güter* der jeweiligen Gütergruppe.

Tabelle 8.3.6 Auszug aus der Importtabelle 1995 des Statistischen Bundesamts. cif-Preise in Mio. DM.

	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
1	18227	10105	0	0	0	0	61	1236	11402	29629
2	606	101	0	0	0	0	0	71	172	778
3	695	139	0	0	0	0	0	72	211	906
4	1310	121	0	0	0	0	0	15	136	1446
5	24167	4073	0	0	0	0	155	292	4520	28687
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	3761	0	0	0	0	0	3	14	17	3778
8	2261	16	0	0	0	0	0	140	156	2417
9	18372	23233	0	0	0	0	-318	2452	25367	43739
10	40	681	0	0	0	0	95	173	949	989
11	9949	8425	0	0	389	0	180	4743	13737	23686
12	3299	21367	0	0	0	0	617	5088	27072	30371
13	1784	7169	0	0	0	0	201	1482	8852	10636
14	8138	431	0	0	46	567	16	353	1413	9551
15	17397	1026	0	0	0	0	0	1495	2521	19918
16	3197	2443	0	0	0	0	0	555	2998	6195
17	8753	4221	0	0	0	0	276	144	4641	13394
18	57715	5519	0	0	0	0	202	6804	12525	70240
19	14499	2671	0	0	119	98	49	1835	4772	19271
20	10216	1467	0	0	0	20	11	803	2301	12517
21	44897	0	0	0	0	1278	358	2943	4579	49476
22	11827	1263	0	0	1177	2597	0	1939	6976	18803
23	19933	4189	0	0	18400	913	-2328	7887	29061	48994
24	6938	1997	0	0	15118	0	0	9022	26137	33075
25	15469	926	0	0	3554	1100	26	7227	12833	28302
26	14240	6490	0	0	5780	0	265	8468	21003	35243
27	5559	2074	0	0	6024	0	54	4347	12499	18058
28	21002	19817	0	0	14687	0	5562	5479	45545	66547
29	7511	2620	0	0	2890	9	0	6203	11722	19233
30	3510	10893	0	0	2928	39	0	1954	15814	19324
31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
32	843	449	0	0	0	0	0	0	449	1292
33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
34	3534	0	0	0	0	2090	0	0	2090	5624
35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
36	7276	0	0	0	0	0	0	0	0	7276
37	0	143	0	0	0	0	0	18	161	161
38	960	2895	0	0	0	0	0	0	2895	3855
39	4960	3196	0	0	514	17	0	0	3727	8687
40	1515	47	0	0	0	0	0	0	47	1562
41	2058	2161	0	0	0	0	0	0	2161	4219
42	6877	48	0	0	0	0	0	0	48	6925
43	4371	2195	0	0	0	0	0	0	2195	6566
44	577	221	0	0	0	0	0	0	221	798
45	2205	0	0	0	0	0	0	0	0	2205
46	7014	226	0	0	0	0	0	0	226	7240
47	4450	0	0	0	0	0	0	0	0	4450
48	2160	7	0	0	0	0	0	0	7	2167
49	1477	12	0	0	638	0	0	0	650	2127
50	4359	0	0	0	0	0	0	0	0	4359
51	7428	41	0	0	0	686	0	7	734	8162
52	1891	0	0	0	0	0	0	0	0	1891
53	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
54	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
55	2578	1801	0	0	0	0	0	0	1801	4379
56	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
57	2335	1378	0	0	0	0	0	51	1429	3764
58	308	0	0	0	0	0	0	0	0	308
59	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
60	424448	158297	0	0	72264	9414	5485	83312	328772	753220

Kapitel 9

Erste Schritte zur Tabellenanalyse

In diesem und im nächsten Kapitel wird besprochen, wie man mit Input-Output-Tabellen Berechnungen durchführen kann. In diesem Kapitel werden zunächst einige Hinweise zum praktischen Arbeiten mit Input-Output-Tabellen gegeben. Dann wird gezeigt, wie sich solche Tabellen aggregieren lassen. In den restlichen Abschnitten werden einige Analysemöglichkeiten besprochen, die sich bei einer Interpretation von Input-Output-Tabellen als Adjazenzmatrizen von Graphen ergeben. Als Datengrundlage dient die Input-Output-Tabelle 1995 des Statistischen Bundesamts, auf die auch bereits im vorangegangenen Kapitel Bezug genommen worden ist. Zum Verweis auf die Dokumentation dieser Daten in der Fachserie 18, Reihe 2, Input-Output-Rechung 1995 wird wie bisher die Abkürzung FS 18, R. 2–1995 verwendet.

9.1 Hinweise zum praktischen Rechnen

1. Wir beziehen uns exemplarisch auf die A-Tabelle für das Jahr 1995. Im Anschluß an die Erläuterungen im vorangegangenen Kapitel kann der Gesamtaufbau dieser Tabelle durch folgendes Schema verdeutlicht werden:

	1 ··· 59	60 61 62 63 64 65 66 67 68 69
1 ⋮ 59	**A**	v
60 61 62 63 64 65 66 67 68	u	frei

Im ersten Quadranten befindet sich die Matrix **A**, die die Vorleistungsverflechtungen erfasst. Rechts neben **A** befindet sich der Quadrant v, in dem die Güterverwendung dargestellt wird (vgl. Tab. 8.3.4), und unterhalb von **A** befindet sich der Quadrant u, in dem die Buchführung über die Produktionskosten erfolgt (vgl. Tab. 8.3.2). Der vierte Quadrant ist im wesentlichen leer; nur in den Zeilen 60–63 gibt es in der Tabelle Einträge

Box 9.1.1 Skript zur Erzeugung der Tabelle 8.3.3.2 a-b.

```
mfmt = 10.0;                    Einstellen des Druckformats
mdef(A,59,69) = iot95ip.dat;    Einlesen des Files iot95ip.dat
mscol(A,<60,,69>,T);            Auswahl von Spalten
mpr(T) = tab;                   Ausdruck in das Datenfile tab
```

mit Zeilen- bzw. Spaltensummen.

2. Um mit der Tabelle rechnen zu können, ist es zweckmäßig, den vierten Quadranten mit Nullen aufzufüllen, so dass eine rechteckige Matrix entsteht. Speichert man diese Matrix in einem Datenfile ab, kann man sie in ein Programm einlesen, Teilmatrizen herausziehen und mit ihnen rechnen. Auf die gleiche Weise kann man bei allen Tabellenvarianten vorgehen. Wir haben folgende Datenfiles erzeugt:[1]

Tabelle	Datenfile	Zeilen	Spalten	FS 18, R. 2–1995
A-Tabelle	`iot95ip.dat`	68	69	S. 120 ff.
A*-Tabelle	`iot95ipi.dat`	70	70	S. 96 ff.
Import-Tabelle	`iot95i.dat`	60	69	S. 108 ff.

3. Erzeugt man die Datenfiles im ASCII-Format, kann man sie mit den meisten Statistikprogrammen lesen.[2] Wir verwenden wie schon in füheren Kapiteln das Programm TDA. Zunächst soll erläutert werden, wie man Matrizen erzeugen kann, die nur Teile der Gesamttabelle enthalten. Als Beispiel dient die Erzeugung der Daten für die Tabelle 8.3.4 (in Abschnitt 8.3.3). Box 9.1.1 zeigt das Skript, mit dem die Daten erzeugt worden sind: In der ersten Zeile wird mit dem Befehl `mfmt` das Druckformat für Zahlen eingestellt; dann wird mit dem `mdef`-Befehl eine Matrix `A` erzeugt, die die ersten 59 Zeilen und 69 Spalten der Gesamttabelle aus dem Datenfile `iot95ip.dat` enthält; dann wird mit dem `mscol`-Befehl eine neue Matrix `T` erzeugt, die nur die Spalten $60, \ldots, 70$ der Matrix `A` enthält; schließlich wird die Matrix `T` in ein Datenfile mit dem Namen `tab` geschrieben.

[1] Zur Erzeugung des Datenfiles gibt es zwei Möglichkeiten. Man kann die Daten aus den in der Fachserie angegebenen Tabellen abtippen, oder man kann sie in computerlesbarer Form vom Statistischen Bundesamt anfordern. Die zweite Möglichkeit hat nicht nur den Nachteil, dass man dann für die Daten bezahlen muss; ein weiterer Nachteil besteht darin, dass man EXCEL-Tabellen bekommt, also Dateien in einem Format, das sich für wissenschaftliche Rechnungen nicht eignet; schon deshalb nicht, weil die Firma Microsoft über das Format ihrer EXCEL-Dateien keine öffentlichen Angaben macht und einigermaßen solide Exportmöglichkeiten nur innerhalb des firmeneigenen Programmspektrums ermöglicht.

[2] ASCII ist eine Abkürzung für „American Standard Code of Information Interchange“. Die Darstellung von Daten ist dann unabhängig von der Architektur des jeweils verwendeten Computers.

Box 9.1.2 Berechnung von Vorleistungsanteilen an der gesamten Verwendung von Gütern (A*-Tabelle 1995).

```
mfmt = 9.2;                          Einstellen des Druckformats
mdef(A,59,70) = iot95ipi.dat;        Einlesen der Tabelle
mscol(A,<60>,V);                     V = Spalte 60
mscol(A,<70>,X);                     X = Spalte 70
mexpr(100 * V / X, Anteil);          Anteil = 100 * V / X
mnum(1,1,59,N);                      N = 1,...,59
mcath(N,X,V,Anteil,Tab);             Zusammenfuegen
mpr(Tab);                            Ausdruck
```

Tabelle 9.1.1 Vorleistungsanteile an der gesamten Verwendung von Gütern (A*-Tabelle 1995).

i	x	v	a	i	x	v	a
1	110963	71940	64.83	31	2799	2799	100.00
2	4699	3202	68.14	32	109578	66018	60.25
3	1526	970	63.56	33	13379	6231	46.57
4	20828	18662	89.60	34	485974	102005	20.99
5	33814	27244	80.57	35	89497	23241	25.97
6	0	0	0.00	36	281457	168143	59.74
7	4209	4141	98.38	37	244162	31239	12.79
8	14373	13023	90.61	38	112861	16167	14.32
9	274587	89584	32.62	39	111588	38193	34.23
10	10843	1933	17.83	40	15088	4317	28.61
11	56444	21727	38.49	41	30294	9548	31.52
12	52547	4589	8.73	42	106299	79269	74.57
13	17442	3014	17.28	43	104259	59132	56.72
14	54540	43762	80.24	44	173176	163246	94.27
15	66834	44438	66.49	45	90655	32739	36.11
16	94177	56951	60.47	46	35280	33515	95.00
17	53747	32446	60.37	47	524898	186952	35.62
18	253410	136410	53.83	48	80821	71295	88.21
19	103979	70697	67.99	49	58669	33037	56.31
20	92488	74184	80.21	50	30722	9476	30.84
21	148469	100810	67.90	51	399042	344391	86.30
22	175628	116708	66.45	52	562961	27563	4.90
23	304467	90951	29.87	53	167601	5962	3.56
24	53843	16781	31.17	54	293127	205100	69.97
25	149971	87418	58.29	55	53251	31079	58.36
26	81305	25278	31.09	56	35158	14294	40.66
27	71273	23773	33.35	57	95705	33207	34.70
28	306559	69762	22.76	58	59937	27533	45.94
29	50127	12066	24.07	59	4050	0	0.00
30	74710	11155	14.93				

Dieses Datenfile kann dann in ein Textverarbeitungsprogramm eingelesen und weiter gestaltet werden.

4. Als zweites Beispiel soll gezeigt werden, wie man für jeden Sektor berechnen kann, welcher Teil an der Gesamtheit der jeweiligen Güter in Ge-

stalt von Vorleistungen (in allen Sektoren) verwendet wird. Grundlage für die Berechnungen ist in diesem Beispiel die A*-Tabelle. Box 9.1.2 zeigt das Skript, Tabelle 9.1.1 zeigt das Ergebnis, also den Inhalt der durch das Skript erzeugten Matrix `Tab`. Man erkennt, dass die Vorleistungsanteile sehr unterschiedliche Größenordnungen aufweisen. Besonders groß ist der Anteil im Sektor 7 (Erze); mehr als 98 % dieser Güter werden als Vorleistungen verwendet, überwiegend im Bereich 21 (Herstellung von Metallen und Halbzeugen). Noch extremer ist der Bereich 31 (Sekundärrohstoffe), dessen Güter vollständig in Gestalt von Vorleistungen verwendet werden.[3]

[3] Bei solchen Vergleichen sollte allerdings darauf geachtet werden, dass die Vorleistungsanteile auch von der Art der Bildung der Produktionsbereiche und von der Buchung bereichsinterner Güterströme abhängig sind; darauf wurde z.B. von K.-H. Raabe (1965, S. 248) hingewiesen.

9.2 Aggregation von Input-Output-Tabellen

1. Manchmal ist es zweckmäßig, Input-Output-Tabellen zu aggregieren, d.h. mehrere Sektoren zu neuen Sektoren zusammenzufassen. Auf diese Weise kann man Tabellen mit weniger Zeilen und Spalten erzeugen, die sich überschaubarer darstellen lassen. Z.B. veröffentlicht das Statistische Bundesamt sowohl in der Fachserie als auch in den Statistischen Jahrbüchern aggregierte Tabellen, in denen die ursprünglich 59 Sektoren zu 12 neuen Bereichen zusammengefasst werden.[4] In diesem Abschnitt wird besprochen, wie man die Aggregation praktisch durchführen kann. Dabei orientieren wir uns an der Vorgehensweise des Statistischen Bundesamts. Die folgende Tabelle zeigt, wie die Sektoren zusammengefasst werden.

Neuer Bereich		gebildet aus
1	Land- und Forstwirtschaft, Fischerei	1–3
2	Bergbau, Gewinnung von Steinen und Erden, Energie- und Wasserversorgung	4–8, 32–33
3	Mineralölverarbeitung, chem. Industrie, Glasgewinnung, Verarbeitung von Steinen u. Erden	17–20
4	Metallerzeugung und -bearbeitung	21–22
5	Maschinen-, Fahrzeugbau, Datenverarbeitungsgeräte, Elektrotechnik	23–29
6	Textil- und Bekleidungsgewerbe, Leder-, Holz-Papiergewerbe, Recycling u.ä.	11–16, 30–31
7	Ernährungsgewerbe und Tabakverarbeitung	9–10
8	Baugewerbe	34
9	Handel, Verkehr, Nachrichtenübermittlung, Gastgewerbe	35–43
10	Finanzierung, Vermietung und Unternehmensdienstleister	44–51
11	Gesundheits-, Veterinär- und Sozialwesen, Erziehung und Unterricht, Entsorgung	53–55
12	Öffentliche Verwaltung, Verteidigung, Sozialversicherung, sonstige öffentliche und private Dienstleistungen, häusliche Dienste	52, 56–59

2. Weiterhin muss überlegt werden, wie mit den übrigen Zeilen und Spalten der Tabellen umgegangen werden soll. In den meisten Fällen sollten sie unverändert in die aggregierten Tabellen übernommen werden. Einige Zeilen und Spalten sind jedoch nicht unbedingt erforderlich und einige können zusammengefasst werden. Wir verwenden folgende Zuordnung der

[4] Die aggregierte Tabelle für 1995 findet man im Statistischen Jahrbuch 1999, S. 678 f.; sie wird dort allerdings in Ab-Werk-Preisen angegeben. Ausführliche Hinweise gibt es in der FS 18, R. 2–1995.

Box 9.2.1 Skript zur Erzeugung der Tabellen 8.3.3.2a-b.

```
mfmt = 10.0;
mdeff(A) = iot95ip.dat;          # Einlesen der Tabelle

mdef(CI,68,1) =                  # Definition eines Spaltenvektors,
  1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 7, 7,  # durch den angegeben wird,
  6, 6, 6, 6, 6, 6, 3, 3, 3, 3,  # welche Zeilen zusammengefasst
  4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6,  # werden sollen.
  6, 2, 2, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 9,
  9, 9, 9,10,10,10,10,10,10,10,
 10,12,11,11,11,12,12,12,12,13,
 14,15,16,17,18,19,20,21;

mdef(RI,1,69) =                  # Definition eines Zeilenvektors,
  1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 7, 7,  # durch den angegeben wird,
  6, 6, 6, 6, 6, 6, 3, 3, 3, 3,  # welche Spalten zusammengefasst
  4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6,  # werden sollen.
  6, 2, 2, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 9,
  9, 9, 9,10,10,10,10,10,10,10,
 10,12,11,11,11,12,12,12,12,13,
 14,14,15,16,16,17,18,19,20;

mag(A,CI,RI,AA);                 # Bildung der aggregierten Matrix AA
mpr(AA) = iot95ip.agg;           # Ausdruck in das File iot95ip.agg
```

Zeilen:

Neue Zeile	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
A-Tabelle	60	61	62	63	64	65	66	67	68	
A*-Tabelle	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
Import-Tabelle	60									

und folgende Zuordnung der Spalten:

Neue Spalte	13	14	15	16	17	18	19	20
A-Tabelle	60	61 – 62	63	64 – 65	66	67	68	69
A*-Tabelle	60	61 – 62	63	64 – 65	66	67	69	70
Import-Tabelle	60	61 – 62	63	64 – 65	66	67	68	69

Somit können drei aggregierte Tabellen erzeugt werden:

Tabelle	Datenfile	Zeilen	Spalten
A-Tabelle	`iot95ip.agg`	21	20
A*-Tabelle	`iot95ipi.agg`	22	20
Import-Tabelle	`iot95i.agg`	13	20

Tabelle 9.2.3 Aggregierte A-Tabelle 1995.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2240	97	123	0	0	2428	47208	0	1147	1443
2	2393	20955	19380	8804	7929	6515	4422	4961	12625	4001
3	4116	1959	65268	8943	29032	11727	4860	64158	10242	2069
4	622	2837	6498	55609	58397	3405	2680	21397	4804	858
5	1710	6474	5752	7502	149974	2487	1633	20637	16833	4089
6	344	666	5709	2679	10529	54876	5380	15429	17489	12894
7	6418	9	3022	17	125	62	32903	25	21608	82
8	809	3818	2503	2163	2600	1522	1091	7788	10307	46392
9	7448	6625	22104	19972	48024	24223	21815	27273	141093	21295
10	6847	15868	42243	14864	59006	28263	22522	58569	132469	388632
11	2145	709	2852	976	1081	1593	1515	1054	7836	6809
12	558	8237	2796	1441	2696	4244	1780	2249	14175	23296
13	35650	68254	178250	122970	369393	141345	147809	223540	390628	511860
14	5927	7206	72223	40387	105605	43956	28478	28270	38582	23169
15	2012	4320	2155	1006	3645	1554	1003	2399	16833	14564
16	43589	79780	252628	164363	478643	186855	177290	254209	446043	549593
17	18025	43551	96177	73932	243252	81176	39127	154283	416658	242843
18	-4151	-7945	3294	1083	1808	1863	1259	1956	6830	11773
19	28412	43175	36103	16440	44390	29918	23026	69902	186723	557546
20	42286	78781	135574	91455	289450	112957	63412	226141	610211	812162
21	85875	158561	388202	255818	768093	299812	240702	480350	1056254	1361755

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	632	1266	56584	16121	0	5818	50	7302	29291	85875
2	5471	5521	102977	52374	0	220	178	2812	55584	158561
3	6184	13996	222554	35427	0	1735	1679	126807	165648	388202
4	2171	1516	160794	5105	0	23913	-640	66646	95024	255818
5	12362	5924	235377	69730	0	134197	657	328132	532716	768093
6	6373	8793	141161	82213	0	17887	-1052	59603	158651	299812
7	5964	2870	73105	136927	0	0	1133	29537	167597	240702
8	10700	8778	98471	6689	0	374898	0	292	381879	480350
9	18895	42465	401232	532067	5210	27686	0	90059	655022	1056254
10	36794	38904	844981	420444	11480	58236	0	26614	516774	1361755
11	9074	203919	239563	131265	136550	0	0	2222	270037	509600
12	6702	29889	98063	100621	544580	6812	0	1772	653785	751848
13	121322	363841	2674862	1588983	697820	651402	2005	741798	3682008	6356870
14	13123	17522	424448	158297	0	81678	5485	83312	328772	753220
15	11181	20328	81000	210180	0	57490	30	-2260	265440	346440
16	145626	401691	3180310	1957460	697820	790570	7520	822850	4276220	7456530
17	284234	249562	1942820	0	0	0	0	0	0	0
18	-13394	-3496	880	0	0	0	0	0	0	0
19	93134	104091	1232860	0	0	0	0	0	0	0
20	363974	350157	3176560	0	0	0	0	0	0	0
21	509600	751848	6356870	0	0	0	0	0	0	0

3. Die aggregierten Tabellen können auf einfache Weise aus den ursprünglichen Tabellen erzeugt werden, da es nur erforderlich ist, die Elemente der Zeilen und Spalten, die zusammengefasst werden sollen, zu addieren.[5] Wir erläutern die Vorgehensweise anhand der A-Tabelle. Box 9.2.1 zeigt das Skript, das für die Aggregation verwendet wurde. Zunächst wird die A-Tabelle mit dem `mdeff`-Befehl eingelesen. Dann werden Vektoren definiert, die angeben, wie die Zeilen und Spalten der Tabelle (der Matrix `A`)

[5] Eine sehr ausführliche Darstellung dieser Additionsvorgänge anhand von Zahlenbeispielen findet man bei Holub und Schnabl (1994a, Kap. 4).

Tabelle 9.2.4 Aggregierte A*-Tabelle 1995.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2647	100	813	0	0	3863	62622	0	1914	1445
2	2692	23625	40975	13235	8375	7170	4821	5365	13166	4222
3	7292	3199	103026	12566	39976	19197	6564	74167	14807	4073
4	801	3141	8479	84586	75981	4666	3035	25481	5712	1046
5	2126	8087	6748	8979	221333	3552	1854	24885	20696	5136
6	508	779	7771	3321	12925	85501	6299	18903	20903	14094
7	7265	9	4649	17	125	122	41689	25	26485	86
8	814	4190	3123	2169	2619	1531	1098	9888	10361	46657
9	7700	7026	23946	20916	49796	25040	22318	28027	159097	22333
10	7025	16353	45087	15144	60065	28816	22685	61637	133186	405770
11	2149	714	3060	983	1107	1599	1522	1183	8708	6871
12	558	8237	2796	1441	2696	4244	1780	2249	14175	23296
13	41577	75460	250473	163357	474998	185301	176287	251810	429210	535029
14	2012	4320	2155	1006	3645	1554	1003	2399	16833	14564
15	43589	79780	252628	164363	478643	186855	177290	254209	446043	549593
16	18025	43551	96177	73932	243252	81176	39127	154283	416658	242843
17	-4151	-7945	3294	1083	1808	1863	1259	1956	6830	11773
18	28412	43175	36103	16440	44390	29918	23026	69902	186723	557546
19	42286	78781	135574	91455	289450	112957	63412	226141	610211	812162
20	85875	158561	388202	255818	768093	299812	240702	480350	1056254	1361755
21	31313	37620	115422	68279	249452	119681	44728	5624	39251	31508
22	117188	196181	503624	324097	1017545	419493	285430	485974	1095505	1393263

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1168	1540	76112	26466	0	5818	111	8681	41076	117188
2	5815	5858	135319	57033	0	220	336	3273	60862	196181
3	9461	19409	313737	49305	0	1972	2217	136393	189887	503624
4	2853	1737	217518	6368	0	28965	-282	71528	106579	324097
5	15136	7497	326029	107843	0	202672	4236	376765	691516	1017545
6	7435	9996	188435	133967	0	21856	-38	75273	231058	419493
7	7453	3592	91517	160841	0	0	910	32162	193913	285430
8	10741	8814	102005	6689	0	376988	0	292	383969	485974
9	19226	43824	429249	542752	5210	28217	0	90077	666256	1095505
10	38820	40063	874651	420951	11480	59560	0	26621	518612	1393263
11	9635	204610	242141	133066	136550	0	0	2222	271838	513979
12	6702	34423	102597	101999	544580	6812	0	1823	655214	757811
13	134445	381363	3099310	1747280	697820	733080	7490	825110	4010780	7110090
14	11181	20328	81000	210180	0	57490	30	-2260	265440	346440
15	145626	401691	3180310	1957460	697820	790570	7520	822850	4276220	7456530
16	284234	249562	1942820	0	0	0	0	0	0	0
17	-13394	-3496	880	0	0	0	0	0	0	0
18	93134	104091	1232860	0	0	0	0	0	0	0
19	363974	350157	3176560	0	0	0	0	0	0	0
20	509600	751848	6356870	0	0	0	0	0	0	0
21	4379	5963	753220	0	0	0	0	0	0	0
22	513979	757811	7110090	0	0	0	0	0	0	0

zusammengefasst werden sollen. Dann wird mit dem `mag`-Befehl die aggregierte Matrix `AA` erzeugt und mit dem `mpr`-Befehl in ein neues Ausgabefile `iot95ip.agg` geschrieben. Mit ganz analog aufgebauten Skripten kann eine aggregierte A*-Tabelle und eine aggregierte Import-Tabelle erzeugt werden.

4. Tabelle 9.2.3 zeigt die aggregierte A-Tabelle. Die Angaben beziehen sich wie in der ursprünglichen Tabelle auf Herstellungspreise in Mio. DM.

Tabelle 9.2.5 Aggregierte Import-Tabelle 1995.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	407	3	690	0	0	1435	15414	0	767	2
2	299	2670	21595	4431	446	655	399	404	541	221
3	3176	1240	37758	3623	10944	7470	1704	10009	4565	2004
4	179	304	1981	28977	17584	1261	355	4084	908	188
5	416	1613	996	1477	71359	1065	221	4248	3863	1047
6	164	113	2062	642	2396	30625	919	3474	3414	1200
7	847	0	1627	0	0	60	8786	0	4877	4
8	5	372	620	6	19	9	7	2100	54	265
9	252	401	1842	944	1772	817	503	754	18004	1038
10	178	485	2844	280	1059	553	163	3068	717	17138
11	4	5	208	7	26	6	7	129	872	62
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	5927	7206	72223	40387	105605	43956	28478	28270	38582	23169

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	536	274	19528	10345	0	0	61	1379	11785	31313
2	344	337	32342	4659	0	0	158	461	5278	37620
3	3277	5413	91183	13878	0	237	538	9586	24239	115422
4	682	221	56724	1263	0	5052	358	4882	11555	68279
5	2774	1573	90652	38113	0	68475	3579	48633	158800	249452
6	1062	1203	47274	51754	0	3969	1014	15670	72407	119681
7	1489	722	18412	23914	0	0	-223	2625	26316	44728
8	41	36	3534	0	0	2090	0	0	2090	5624
9	331	1359	28017	10685	0	531	0	18	11234	39251
10	2026	1159	29670	507	0	1324	0	7	1838	31508
11	561	691	2578	1801	0	0	0	0	1801	4379
12	0	4534	4534	1378	0	0	0	51	1429	5963
13	13123	17522	424448	158297	0	81678	5485	83312	328772	753220

Sie stimmt mit derjenigen überein, die in der FS 18, R. 2–1995 (S. 50 f.) angegeben wird. Weiterhin zeigt Tabelle 9.2.4 die aggregierte A*-Tabelle. Die Angaben beziehen sich wie in der ursprünglichen Tabelle auf Herstellungspreise in Mio. DM. Sie stimmt mit derjenigen überein, die in der FS 18, R. 2–1995 (S. 32 f.) angegeben wird. Schließlich zeigt Tabelle 9.2.5 die aggregierte Import-Tabelle. Die Angaben beziehen sich wie in der ursprünglichen Tabelle auf cif-Preise in Mio. DM. Sie stimmt mit derjenigen überein, die in der FS 18, R. 2–1995 (S. 48 f.) angegeben wird.

9.3 Input-Output-Tabellen als Graphen

Die Sektoren, deren Verflechtung durch Güterlieferungen in einer Input-Output-Tabelle erfasst wird, können als Knoten eines Graphen aufgefasst werden. In unserem Beispiel erhält man einen gerichteten und bewerteten Graphen, der 59 Knoten umfasst. Zwischen zwei Knoten i und j gibt es genau dann eine Kante, wenn in der Tabelle $a_{ij} > 0$ ist. Bei dieser Betrachtungsweise ist es auch möglich, zunächst von den Kantenbewertungen, die durch a_{ij} gegeben sind, abzusehen und sich nur mit strukturellen Eigenschaften der Graphen zu beschäftigen. In der Literatur wird gelegentlich von „qualitativer Input-Output-Analyse“ gesprochen.[6] Im folgenden werden einige der hierfür vorgeschlagenen Methoden besprochen. Mit Berechnungen, die von quantitativ bestimmten Güterströmen ausgehen, beschäftigen wir uns im nächsten Kapitel.

9.3.1 Zusammenhänge zwischen Sektoren

1. Einer der Vorschläge besteht darin, Komponenten zu untersuchen. Darüber wurde bereits ausführlich in den Abschnitten 3.3 und 3.4 gesprochen. Auf den ersten Blick erscheint das Konzept auch für die Input-Output-Analyse sinnvoll. Denn angenommen, dass sich eine Vorleistungsmatrix in Komponenten $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ zerlegen lässt. Dann kann man stets eine passende Umnummerierung der Sektoren finden, so dass für je zwei Komponenten $\mathbf{A}_i$ und $\mathbf{A}_j$ gilt:

a) Entweder gibt es keinerlei Güterströme zwischen $\mathbf{A}_i$ und $\mathbf{A}_j$, oder

b) es ist $i < j$, d.h. die Güterströme zwischen den Komponenten verlaufen in einer einheitlichen Richtung.

Die Frage der Zerlegbarkeit einer Vorleistungsmatrix in Komponenten spielt deshalb bereits in der Arbeit von Czayka (1972) eine zentrale Rolle. Zur Diskussion verwendet Czayka eine fiktive Tabelle, die aus 11 Sektoren besteht und in der es vier Komponenten gibt.[7] Allerdings sollte untersucht werden, ob man auch in empirisch ermittelten Input-Output-Tabellen relevante Komponenten findet, denn in Ökonomien mit weit entwickelter Verflechtung zwischen den Sektoren erscheint dies eher unwahrscheinlich.

2. Um die Frage zu untersuchen, beziehen wir uns auf die Matrix der Vorleistungen in der A-Tabelle für 1995. Eine einfache Möglichkeit besteht darin, nach einer Permutation der Zeilen und Spalten zu suchen, so dass

[6] Eine der ersten Arbeiten stammt von L. Czayka (1972). Weitere Beiträge gibt es u.a. von H. Schnabl und H.-W. Holub (1979); Holub, Schnabl und Tappeiner (1985); Holub und Schnabl (1994, S. 184 ff.).

[7] Dasselbe Beispiel wurde auch in den bereits erwähnten Beiträgen von Schnabl und Holub (1979) und von Holub und Schnabl (1994, S. 184 ff.) verwendet.

Box 9.3.1 Skript zur Erzeugung einer oberen Blockdiagonalmatrix.

```
mfmt = 10.0;                     Einstellen des Druckformats
mdef(A,59,59) = iot95ip.dat;     Einlesen der Vorleistungsmatrix
mpbu(A,B,P,N,U);                 Erzeugen der Blockdiagonalmatrix
mpr(B);                          Ausdruck der permutierten Matrix
```

eine obere Blockdiagonalmatrix entsteht (man vgl. die Ausführungen in Abschnitt 3.4). Box 9.3.1 zeigt das Skript. Untersucht man die resultierende Matrix B, findet man, dass es keine relevanten Komponenten gibt. Tatsächlich gehören 57 der 59 Sektoren einer gemeinsamen Komponente an. Nur zwei Sektoren, Nr. 6 (Uran- und Thoriumerze) und Nr. 59 (DL privater Haushalte) bilden jeweils eine eigene triviale Komponente, denn beide Sektoren weisen keinerlei Verbindung zu anderen Sektoren auf.[8]

3. In der Literatur ist gelegentlich vorgeschlagen worden, dadurch zu Zerlegungen in Komponenten zu gelangen, dass man nur Güterströme berücksichtigt, die einen gewissen Schwellenwert übertreffen.[9] Es ist klar, dass man auf diese Weise zu Komponenten gelangen kann. Berücksichtigt man z.B. nur Güterströme, die mindestens 100 Mio. DM betragen, findet man 2 echte Komponenten, bei Güterströmen, die mindestens 500 Mio. DM betragen, findet man 9 echte Komponenten. Aber dieser Vorgehensweise haftet offenbar eine große Willkür an, und sie soll hier deshalb nicht näher verfolgt werden.[10]

4. Eine der Begründungen für eine „qualitative Input-Output-Analyse" bezieht sich auf konjunkturpolitische Fragen. Dazu heißt es bei Holub und Schnabl (1994, S. 195):

„In manchen Fällen mag es dem Wirtschaftspolitiker zweckmäßig erscheinen, für bestimmte Maßnahmen einen Sektor auszuwählen, der einen besonders *effektiven Einsatz* der finanziellen Mittel verspricht. Diese Auswahl wird man sicherlich von der Input-Verflechtung eines solchen Sektors abhängig machen, da diese die erhoffte Ausstrahlung auf die anderen Sektoren und darum eine gewisse Mitziehwirkung produziert. Die graphentheoretische Behandlung dieses Zusammenhangs ist durch die Definition der sog. *INPUT-Basis* gegeben. Eine Input-Basis ist definiert als die *Menge der Sektoren*, von denen aus *alle übrigen* – nicht zur Input-Basis rechnenden – *Sektoren erreichbar sind*."

[8] Zu einem entsprechenden Ergebnis kaum auch bereits H. Wessels (1981, S. 13) bei einer Untersuchung der Input-Output-Tabellen des DIW: „Die Nachfrage nach Produkten irgendeines Produktionssektors in Höhe einer Einheit bedingt nach der Matrix der inversen Leontief-Koeffizienten für die Bundesrepublik mit wenigen Ausnahmen eine Produktion in allen Branchen. Die Ausnahmen sind in den Matrizen des DIW beim Staat und bei den Privaten Haushalten zu finden. Beim Staat wird bei der Inversion der Matrizen des DIW nämlich unterstellt, daß der Input nur aus Beiträgen zum Bruttoinlandsprodukt besteht, d.h. keine Vorleistungen auftreten (dadurch kann der Vektor der Bezüge des Staates als exogene Variable behandelt werden), und die Privaten Haushalte leisten nur häusliche Dienste, die nur in den Privaten Verbrauch eingehen und ebenfalls ohne Vorleistungen erstellt werden."

[9] Man vgl. Schnabl und Holub (1979) sowie Holub, Schnabl und Tappeiner (1985).

[10] Man vgl. auch die kritischen Ausführungen von E. Kleine und B. Meyer (1982).

Wenn eine Input-Output-Tabelle aus mehreren Komponenten besteht, muss man also aus jeder Komponente einen Sektor auswählen, um zu einer Input-Basis zu gelangen. Wenn es aber, wie in unserem Beispiel, im wesentlichen nur eine Komponente gibt, bildet jeder Sektor (mit Ausnahme der vollständig isolierten Sektoren) eine Input-Basis, so dass die Idee ihren potentiellen Sinn verliert.[11]

5. Auch wenn eine Input-Output-Tabelle im wesentlichen nur aus einer Komponente besteht, kann man natürlich versuchen, Sektoren nach irgendwelchen Gesichtspunkten zu Gruppen zusammenzufassen. Im Prinzip können die meisten Methoden der sog. Clusteranalyse für diesen Zweck verwendet werden. Hier erwähnen wir nur eine Idee, die zuerst von H. Wessels (1981) verfolgt worden ist. Holub und Schnabl (1994, S. 174), die diese Idee aufgreifen, sprechen von einer „Blocktriangulation":

„Intrablock- oder Interblock-Beziehungen der Sektoren sind dadurch definiert, daß die Summe der Intra-Vorleistungsströme größer sein muß als die Summe der Vorleistungen, die an andere, nicht blockzugehörige Sektoren gehen, und zwar sowohl für gelieferte als auch für empfangene Vorleistungen."

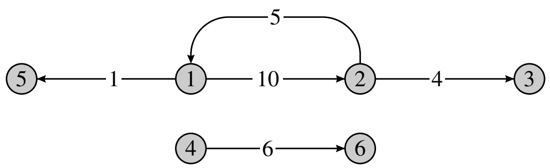
Versuchen wir zunächst, die Definition zu präzisieren. Es sei $\mathcal{N}$ die Knotenmenge (in unserem Beispiel die Zahlen von 1 bis 59 für die Sektoren), und die Adjazenzmatrix sei durch $\mathbf{A} = (a_{ij})$ gegeben. Nach der eben zitierten Idee ist eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}$ dann ein Block, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\min \{a_{ij} \mid i,j \in \mathcal{B}, a_{ij} > 0\} \; > \; \max \{a_{kl} \mid k \in \mathcal{B}, l \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{B}, a_{kl} > 0\}$$

Auf der linken Seite steht das Minimum der Güterströme zwischen den Knoten innerhalb des Blocks, auf der rechten Seite steht das Maximum der Güterströme, die es zwischen irgendeinem Knoten innerhalb des Blocks und irgendeinem anderen Knoten außerhalb des Blocks gibt.[12] Folgendes Beispiel illustriert die Definition:

[11] Ein weiterer Einwand bezieht sich natürlich darauf, dass für konjunkturpolitische Fragen der angedeuteten Art nicht nur die Existenz, sondern auch das quantitative Ausmaß von Güterströmen relevant ist, um Multiplikatorwirkungen einschätzbar zu machen. Man vgl. hierzu den bereits erwähnten Beitrag von Kleine und Meyer (1982).

[12] Mit $\mathcal{N} \setminus \mathcal{B}$ ist die Menge aller Elemente von $\mathcal{N}$, die kein Element von $\mathcal{B}$ sind, gemeint.



In diesem Beispiel gibt es folgende Blöcke: $\{1,2\}$ und $\{1,2,3\}$, und schließlich auch noch $\{4,6\}$ und $\{1,2,3,5\}$ (denn jede Semi-Komponente ist auch ein Block in der eben gegebenen Definition).[13]

6. Allerdings gibt es für größere Graphen keinen praktikablen Algorithmus, um Blöcke dieser Art zu ermitteln. Der Versuch, alle möglichen Kombinationen zu prüfen, endet bereits bei relativ kleinen Blockgrößen. In unserem Beispiel mit 59 Sektoren haben wir jedenfalls keinen Block gefunden, der weniger als 7 Knoten umfasst; und die Frage, ob es vielleicht größere Blöcke gibt, muss unentschieden bleiben.[14] Es sei jedoch erwähnt, dass es in der Literatur über Graphen ein ähnliches Konzept für ungerichtete Graphen gibt: sog. *kompakte Mengen*, die sich auf effiziente Weise auch für größere Graphen berechnen lassen.[15] Verwendet man die oben eingeführte Notation, lautet die Definition: $\mathcal{B}$ ist eine kompakte Menge, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\max\{a_{ij} \mid i,j \in \mathcal{B}, a_{ij} > 0\} \; < \; \min\{a_{kl} \mid k \in \mathcal{B}, l \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{B}, a_{ij} > 0\}$$

Will man diese Definition zur Analyse einer Input-Output-Tabelle anwenden, stellen sich zwei Probleme. Das erste Problem besteht darin, dass der Begriff einer kompakten Menge einen ungerichteten Graphen, also eine symmetrische Adjazenzmatrix voraussetzt. Um das zu erreichen, könnte man z.B. zur Definition einer ungericheten Kante zwischen je zwei Sektoren i und j die Summe der korrespondierenden gerichteten Kanten verwenden, also: $b_{ij} := a_{ij} + a_{ji}$. Dann ist $\mathbf{B} = (b_{ij})$ eine symmetrische Adjazenzmatrix. Das zweite Problem bezieht sich auf die Definition kompakter Mengen, die sich im Unterschied zur oben besprochenenen Definition von Blöcken an minimalen Kantenbewertungen innerhalb der kompakten Mengen orientiert. Deshalb müssen die Kantenbewertungen so transformiert werden, dass sich die Reihenfolge umkehrt, z.B. auf folgende Weise:

$$\tilde{b}_{ij} := \begin{cases} b_{\max} - b_{ij} + 1 & \text{wenn } b_{ij} > 0 \text{ ist} \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Dabei ist $b_{\max}$ das Maximum der Koeffizienten b_{ij}.

[13] In einem Graphen, der nicht in mehrere Komponenten zerlegbar ist, gibt es auch nicht unbedingt Blöcke. Gäbe es in dem oben angeführten Beispiel außerdem die Kanten $a_{5,1} = 6$, $a_{3,2} = 12$ und $a_{3,4} = 7$, könnte man keinen Block finden.

[14] Abgesehen natürlich von den Komponenten, die per Definition auch Blöcke sind.

[15] Man vgl. Liang (1993).

Box 9.3.2 Skript zur Berechnung kompakter Mengen in der A-Tabelle.

```
mdef(A,59,59) = iot95ip.dat;    # Einlesen der Vorleistungsmatrix A
mtransp(A,AT);                  # AT = Transponierte von A
mexpr(300000 - (A + AT),B);     # B = 300000 - (A + AT)
gdd(                            # Definition eines Graphen
  opt= 8,                       # Option: Verwendung einer Matrix
  gt = 2,                       # Option: ungerichteter Graph
  sc = 1,                       # Minimum fuer gueltige Kante
) = B;                          # Adjazenzmatrix
gcset = gcset.out;              # Berechnung kompakter Mengen
                                # Ausgabefile ist gcset.out
```

1	1	Erzeugnisse der Landwirtschaft und Jagd
	9	Nahrungs- und Futtermittel, Getränke
2	4	Kohle und Torf
	32	Energie (Strom, Gas) und DL der Energieversorgung
3	11	Textilien
	12	Bekleidung
4	34	Bauarbeiten
	47	DL des Grundstücks- und Wohnungswesens
5	39	Landverkehrs- und Transportleistungen in Rohrfernleitungen
	42	DL bezüglich Hilfs- und Nebentätigkeiten für den Verkehr
6	50	Forschungs- und Entwicklungsleistungen
	53	Erziehungs- und Unterrichts-DL
7	52	DL der öffentlichen Verwaltung, Verteidigung, Sozialversicherung
	54	DL des Gesundheits-, Veterinär- und Sozialwesens

7. Zur Illustration verwenden wir wieder die A-Tabelle für 1995. Box 9.3.2 zeigt das Skript:

a) Aus den Zeilen und Spalten 1–59 des Datenfiles `iot95ip.dat` wird die Vorleistungsmatrix `A` gebildet.

b) Dann wird die Matrix `A` transponiert, und es wird, wie oben besprochen worden ist, die Matrix `B` gebildet.[16]

c) Im nächsten Schritt wird der bereits bekannte `gdd`-Befehl verwendet, um einen ungerichteten bewerteten Graphen zu definieren. Im Unterschied zu Verwendungen dieses Befehls in früheren Kapiteln wird jetzt jedoch nicht auf eine Kantenliste Bezug genommen, sondern direkt auf die Adjazenzmatrix `B` (dies wird durch den Parameter `opt=8` kenntlich gemacht). Außerdem wird der Parameter `sc=1` angegeben, um zu erreichen, dass nur diejenigen Koeffizienten der Matrix `B` gültige Kanten

[16] Man bemerkt, dass sich bei dieser Berechnung auch die Elemente in der Hauptdiagonalen verdoppeln. Das ist jedoch unproblematisch, da bei der Berechnung kompakter Mengen ggf. vorhandene Schlingen ignoriert werden.

des Graphen bilden, deren Bewertung mindestens 1 ist.[17]

d) Schließlich wird der `gcset`-Befehl verwendet, um die kompakten Mengen zu berechnen.[18] Das Ergebnis wird in ein Ausgabefile `gcset.out` geschrieben.

Die untere Hälfte von Box 9.3.2 zeigt die kompakten Mengen, die in diesem Beispiel gefunden worden sind. Sie bestehen aus jeweils zwei Sektoren, die durch Güterströme besonders eng verflochten sind. Es ist natürlich eine offene Frage, ob man in einem ungerichteten Graphen größere Blöcke finden könnte, die der anfangs gegebenen Definition entsprechen. Da jedoch keine der kompakten Mengen mehr als zwei Sektoren umfasst, erscheint dies eher unwahrscheinlich.

9.3.2 Konstruktion von Reihenfolgen

1. In welcher Reihenfolge die Sektoren einer Input-Output-Tabelle angeordnet werden, ist an und für sich beliebig. Es gibt keine „natürliche“ Reihenfolge. Dennoch sind in der Literatur oft Anstrengungen unternommen worden, spezifische Reihenfolgen zu konstruieren.[19] Holub und Schnabl (1994, S. 165) stellen den Grundgedanken folgendermaßen dar:

> „Betrachtet man eine IOT [Input-Output-Tabelle], so fällt auf, daß sie in aller Regel nach einem immer wiederkehrenden sektoralen „Muster“ geordnet ist. Am Anfang stehen meist Sektoren wie etwa Landwirtschaft, Fischerei oder auch Bergbau, das mittlere Feld wird von der verarbeitenden Industrie belegt, während am Schluß verschiedene Arten von Dienstleistungen als endnachfragenahe Produktionsstufen angeordnet sind.
>
> Diese Gliederung folgt dem bekannten Schema Urproduktion (primärer Bereich), sekundärer und tertiärer Bereich, d.h. dahinter steht die Vorstellung einer *Stufenordnung* im Entwicklungsgeschehen einer Wirtschaft.
>
> Der in dieser Stufenordnung steckende Grundgedanke läßt sich empirisch überprüfen, indem man die in der IOT niedergelegte Verflechtung analysiert und die darin verborgene *Produktionshierarchie* sichtbar macht. Die Idee hierbei ist, daß in einer Struktur, in der im Prinzip Vorleistungen nicht Selbstzweck sind sondern letztlich der Produktion der Endnachfrage dienen, der Produktionsstrom von der Urproduktion zur Endproduktion als *vorwärtsgerichtet* zu charakterisieren ist.“

Man kann sich natürlich fragen, ob diese Ausführungen auch zu einer kapitalistischen Ökonomie passen, in der die Produktion in erster Linie

[17] In der Voreinstellung werden alle Kantenbewertungen zugelassen, deren Wert größer oder gleich Null ist.

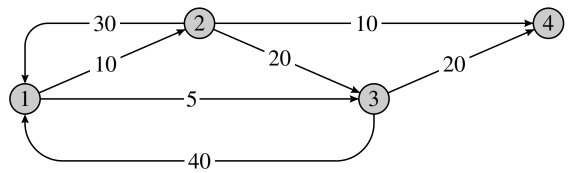
[18] Die Berechnung erfolgt mit einem von Liang (1993) angegebenen Algorithmus.

[19] Man vgl. z.B. die Beiträge von E. Helmstädter (1962, 1965), B. Korte und W. Oberhofer (1968), H. Wessels (1981), sowie die Diskussion bei Holub (1979) und Schnabl (1994, S. 165 ff.).

zum Geldverdienen organisiert ist. Aber auch unabhängig von dieser Frage ist nicht ohne weiteres klar, wie sich sinnvolle Reihenfolgen konstruieren lassen, wenn die Produktionssektoren weitgehend miteinander verflochten sind.

2. Der in der Literatur hauptsächlich verfolgte Gedanke besteht darin, nach einer solchen Reihenfolge der Sektoren zu suchen, bei der die Güterströme überwiegend nur in einer Richtung fließen. Es ist klar, dass sich diese Idee nur dann vollständig realisieren lässt, wenn die Vorleistungsmatrix durch eine simultane Permutation ihrer Zeilen und Spalten (äquivalent zu einer Umnummerierung der Sektoren) in die Form einer oberen Dreiecksmatrix gebracht werden kann.[20] Der zugehörige Graph ist dann linear (vgl. Abschnitt 5.2); und das wiederum bedeutet, dass jeder Sektor eine eigene Komponente des Graphen bildet. Sobald es mindestens einen Zyklus gibt (also auch mindestens eine Komponente, die mindestens zwei Sektoren umfasst), ist eine solche lineare Anordnung nicht mehr möglich, und man kann nur versuchen, eine bestmögliche Approximation zu finden.

3. Zur Verdeutlichung dieser Überlegung kann ein kleines Beispiel dienen, in dem vier Sektoren auf folgende Weise miteinander verbunden sind:



Offensichtlich verlaufen in diesem Beispiel nicht alle Güterströme von links nach rechts, vielmehr insgesamt 65 von links nach rechts und 70 von rechts nach links. Besonders deutlich wird das, wenn man die zugehörige Adjazenzmatrix betrachtet, die in diesem Beispiel folgendermaßen aussieht:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 5 & 0 \\ 30 & 0 & 20 & 10 \\ 40 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alle Einträge oberhalb der Hauptdiagonalen repräsentieren Güterströme, die von links nach rechts fließen; und umgekehrt repräsentieren die Einträge unterhalb der Hauptdiagonalen Güterströme von rechts nach links. Jetzt kann man versuchen, eine Umnummerierung der Sektoren zu finden, so dass in der entsprechend permutierten Adjazenzmatrix die Summe

[20] In der Literatur wird deshalb auch von der „Triangulation“ einer Input-Output-Tabelle gesprochen.

der Einträge oberhalb der Hauptdiagonalen möglichst groß, unterhalb der Hauptdiagonalen möglichst klein wird. In diesem Beispiel liegt es nahe, die Reihenfolge 2, 3, 4, 1 zu verwenden. Dann erhält man die permutierte Adjazenzmatrix

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 10 & 30 \\ 0 & 0 & 20 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In dem dieser Adjazenzmatrix entsprechenden Graphen fließen dann 120 Einheiten von links nach rechts, 15 von rechts nach links.

4. Um die Vorgehensweise in allgemeiner Form darstellen zu können, ist es zweckmäßig, eine explizite Notation für Umnummerierungen und Permutationen einzuführen. Dafür beziehen wir uns auf eine Adjazenzmatrix $\mathbf{A}$ mit n Sektoren bzw. auf einen Graphen mit n Knoten. Die Knotenmenge wird durch $\mathcal{N} := \{1, \ldots, n\}$ bezeichnet. Eine Umnummerierung besteht nun aus einer eineindeutigen Abbildung

$$\alpha : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$$

Jeder Nummer $i \in \mathcal{N}$ wird eine neue Nummer $\alpha(i) \in \mathcal{N}$ zugeordnet.[21] Da die Umnummerierung darin besteht, die Elemente von $\mathcal{N}$ in eine neue Reihenfolge zu bringen, nennt man die Abbildung α auch eine *Permutation*. Jeder Umnummerierung bzw. Permutation entspricht nun auch eine neue Adjazenzmatrix, nämlich

$$\mathbf{A}^\alpha := (a_{\alpha(i),\alpha(j)})$$

Somit kann die Aufgabe allgemein folgendermaßen beschrieben werden: Man finde aus der Menge aller möglichen Permutationen diejenige Permutation α, bei der in der Adjazenzmatrix $\mathbf{A}^\alpha$ die Summe der Einträge oberhalb der Hauptdiagonalen maximal und unterhalb der Hauptdiagonalen minimal wird.

5. Offenbar genügt es, entweder die Summe der Einträge oberhalb der Hauptdiagonalen zu maximieren oder die Summe der Einträge unterhalb der Hauptdiagonalen zu minimieren. Wir orientieren uns an der zweiten Variante. Zur Formulierung wird eine untere Dreiecksmatrix verwendet, deren Koeffizienten unterhalb der Hauptdiagonalen immer den Wert 1 haben, also $\mathbf{D} = (d_{ij})$, wobei die Koeffizienten durch

$$d_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } i > j \\ 0 & \text{wenn } i \leq j \end{cases}$$

[21] Im oben angeführten Beispiel wurde folgende Abbildung verwendet: $\alpha(1) = 3$, $\alpha(2) = 2$, $\alpha(3) = 1$ und $\alpha(4) = 4$.

Box 9.3.3 Skript zur Triangulation der A-Tabelle für 1995.

```
mfmt = 10.0;                      # Druckformat
mdef(A,59,59) = iot95ip.dat;      # A = Vorleistungsmatrix
mdefc(59,59,0,C);                 # C = Nullmatrix
mdefc(59,59,0,D);                 # D = Nullmatrix
repeat(n=59,I);                   # Diese Befehle fuellen das
    repeat(n=59,J);               # untere Dreieck von D
        if (gt(I,J));             # mit Einsen
            msetv(1,D(I,J));
        endif;
    endrepeat;
endrepeat;

mqap(D,A,C,P);                    # Befehl fuer das QA-Problem
mpr(P);                           # Ausdruck des Permutationsvektors
mpsym(A,P,B);                     # Bildung der permutierten Matrix B
mpr(B);                           # Ausdruck der permutierten Matrix
```

definiert sind. Die Summe der Einträge unterhalb der Hauptdiagonalen in der Adjazenzmatrix $\mathbf{A}^\alpha$ erhält man dann durch

$$f(\alpha) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}\, a_{\alpha(i),\alpha(j)} \tag{9.3.1}$$

und die Aufgabe kann folgendermaßen formuliert werden: Man finde aus der Menge aller möglichen Permutationen diejenige Permutation α, die die Funktion $f(\alpha)$ minimal macht.

6. Dies ist eine Variante eines Problems, das in der Literatur als quadratic-assignment-Problem bezeichnet wird, im folgenden abgekürzt QA-Problem. Die Schwierigkeiten seiner Lösung resultieren daraus, dass die Anzahl der möglichen Permutation, nämlich $n\,! = 1 \cdot 2 \cdots n$, mit wachsendem n schnell sehr groß wird. Beim derzeitigen Entwicklungsstand kann man nur dann optimale Lösungen finden, wenn n nicht größer als 15 bis 20 ist.[22] Ähnliche Einschränkungen gelten auch für Verfahren, die speziell zur Triangulation von Input-Output-Tabellen entwickelt worden sind.[23] Bei größeren Tabellen muss man sich deshalb mit näherungsweise optimalen Lösungen zufrieden geben.

[22] Einen Überblick zum gegenwärtigen Diskussionsstand des Problems findet man bei Pardalos, Rendl und Wolkowicz (1994).

[23] Man vgl. Korte und Oberhofer (1968). Der von diesen Autoren entwickelte Algorithmus wurde z.B. von H. Wessels (1981) zur Triangulation der Input-Output-Tabellen des DIW verwendet; um das Rechenverfahren durchführen zu können, ware jedoch eine Aggregation der Tabellen auf 25 Sektoren erforderlich. Holub und Schnabl (1994, S. 174) vermuten, dass eine Obergrenze für die Anwendung des Verfahrens bei etwa 30 Sektoren liegt.

Tabelle 9.3.1 Ergebnis der Triangulation der A-Tabelle für 1995.

1	51	Unternehmensbezogene DL
2	47	DL des Grundstücks- und Wohnungswesens
3	48	DL der Vermietung beweglichen Sachen (ohne Personal)
4	49	DL der Datenverarbeitung und von Datenbanken
5	43	Nachrichtenübermittlungs-DL
6	4	Kohle und Torf
7	17	Kokereierzeugnisse, Mineralölerzeugnisse, Spalt- und Brutstoffe
8	42	DL bezüglich Hilfs- und Nebentätigkeiten für den Verkehr
9	36	Handelsvermittlungs- und Großhandelsleistungen
10	32	Energie (Strom, Gas) und DL der Energieversorgung
11	2	Forstwirtschaftliche Erzeugnisse und DL
12	21	Metalle und Halbzeug daraus
13	22	Metallerzeugnisse
14	14	Holz; Holz-, Kork-, Flechtwaren (ohne Möbel)
15	33	Wasser und DL der Wasserversorgung
16	29	Sonstige Fahrzeuge (Wasser-, Schienen-, Luftfahrzeuge u.a.)
17	41	Luftfahrtleistungen
18	15	Papier, Pappe und Waren daraus
19	58	Sonstige DL
20	16	Verlags- und Druckerzeug., bespielte Ton-, Bild- und Datenträger
21	56	DL von Interessenvertretungen, Kirchen u.ä.
22	46	DL des Kredit- und Versicherungshilfsgewerbes
23	6	Uran- und Thoriumerze
24	24	Büromaschinen, Datenverarbeitungsgeräte und -einrichtungen
25	3	Fische und Fischereierzeugnisse
26	5	Erdöl, Erdgas; DL für Erdöl-, Erdgasgewinnung
27	31	Sekundärrohstoffe
28	59	DL privater Haushalte
29	55	Abwasser-, Abfallbeseitigung- und sonst. Entsorgungsleistungen
30	44	DL der Kreditinstitute
31	7	Erze
32	25	Geräte der Elektrizitätserzeugung, -verteilung u.ä.
33	45	DL der Versicherungen (ohne Sozialversicherung)
34	35	Handelsleistungen mit Kfz; Rep. an Kfz; Tankleistungen
35	40	Schifffahrtsleistungen
36	39	Landverkehrs- und Transportleistungen in Rohrfernleitungen
37	50	Forschungs- und Entwicklungsleistungen
38	18	Chemische Erzeugnisse
39	10	Tabakerzeugnisse
40	13	Leder und Lederwaren
41	19	Gummi- und Kunststoffwaren
42	8	Steine und Erden, sonstige Bergbauerzeugnisse
43	37	Einzelhandelsleistungen; Reparatur an Gebrauchsgütern
44	23	Maschinen
45	20	Glas, Keramik, bearbeitete Steine und Erden
46	11	Textilien
47	34	Bauarbeiten
48	26	Nachr.technik, Rundfunk- und Fernsehgeräte, Elektron. Bauelemente
49	1	Erzeugnisse der Landwirtschaft und Jagd
50	27	Medizin-, mess-, regelungstechn., optische Erzeugnisse; Uhren
51	30	Möbel, Schmuck, Musikinstrumente, Sportgeräte, Spielwaren u.ä.
52	12	Bekleidung
53	57	Kultur-, Sport- und Unterhaltungs-DL
54	9	Nahrungs- und Futtermittel, Getränke
55	38	Beherbergungs- und Gaststätten-DL
56	53	Erziehungs- und Unterrichts-DL
57	28	Kraftwagen und Kraftwagenteile
58	54	DL des Gesundheits-, Veterinär- und Sozialwesens
59	52	DL der öffentlichen Verwaltung, Verteidigung, Sozialversicherung

7. Um zu zeigen, wie man eine näherungsweise optimale Lösung berechnen kann, beziehen wir uns auf die A-Tabelle für 1995. Addiert man die Einträge, findet man

oberhalb der Hauptdiagonalen	879085
unterhalb der Hauptdiagonalen	1163437
in der Hauptdiagonalen	632340

insgesamt Güterströme im Umfang von 2674862 Mio. DM. Gesucht ist eine Umnummerierung der Sektoren, die die Summe der Einträge unterhalb der Hauptdiagonalen minimiert; die Einträge, die sich in der Hauptdiagonalen befinden, können dabei unberücksichtigt bleiben, da sie sich bei symmetrischen Permutationen nicht verändern. Zur Berechnung verwenden wir TDA's `mqap`-Befehl.[24] Box 9.3.3 zeigt das Skript. Zunächst werden die Vorleistungsmatrix `A` und eine untere Dreiecksmatrix `D` gebildet, die unterhalb der Hauptdiagonalen nur Einsen enthält.[25] Als Ergebnis erhält man einen $(n, 1)$-Vektor `P`, dessen Koeffizienten die näherungsweise optimale Permutation angeben.[26] Dieser Vektor kann auch zur Permutation der Zeilen und Spalten der Vorleistungsmatrix `A` verwendet werden. Im Skript geschieht dies durch den Befehl `mpsym`, der als Ergebnis die permutierte Matrix `B` liefert. Berechnet man in dieser Tabelle die Summe der Einträge unterhalb der Hauptdiagonalen, findet man den Wert 342506, also eine deutliche Verringerung.

8. Tabelle 9.3.1 zeigt die näherungsweise optimale Reihenfolge der Sektoren. Bemerkenswert ist vor allem, dass sie keineswegs den im eingangs angeführten Zitat von Holub und Schnabl angedeuteten Vorstellungen entspricht. Die Reihe beginnt nicht mit der Produktion landwirtschaftlicher Güter oder der Gewinnung von Rohstoffen, sondern mit Dienstleistungen.[27] Überraschend ist vielleicht, dass der Sektor Nr. 28 (Kraftwagen und Kraftwagenteile) fast am Ende der Reihe erscheint. Dies wird jedoch plausibel, wenn man sich die Verwendung der Güter dieses Sektors genauer ansieht:

[24] Zugrunde liegt ein von D. H. West (1983) entwickelter Algorithmus zur approximativen Lösung des QA-Problems.

[25] Der `mqap`-Befehl erwartet noch eine dritte Matrix, hier `C` genannt, da er auch zur Lösung verallgemeinerter QA-Probleme verwendet werden kann. Da sie für unsere Problemstellung nicht erforderlich ist, wird sie vollständig mit Nullen gefüllt.

[26] Es sei angemerkt, dass `P` die inverse Permutation enthält. Wenn α die optimale Permutation ist, befindet sich an der i-ten Stelle des Vektors `P` die Zahl $\alpha^{-1}(i)$. Z.B. steht an der ersten Stelle die Zahl 51, also $\alpha^{-1}(1) = 51$ bzw. $\alpha(51) = 1$.

[27] Wie bereits erwähnt worden ist, sind bei den Sektoren Nr. 6 und Nr. 59 alle Koeffizienten Null. Ihre Einordnung in die Reihenfolge ist infolgedessen vollständig beliebig und kann nicht interpretiert werden.

	Vorleistungen insgesamt	48760
+	Konsum privater Haushalte im Inland	50698
+	Anlageinvestitionen	21739
+	Vorratsveränderungen	1997
+	Exporte	116818
=	Gesamte Verwendung von Gütern	240012

D.h., die Verwendung von Kraftwagen und Kraftwagenteilen für die Güterproduktion erscheint großenteils als ein Teil der „Endnachfrage“. Von den 48760 Mio. DM, die insgesamt als Vorleistungen verwendet werden, stehen 42679 Mio. DM in der Hauptdiagonalen der Tabelle. Die entsprechenden Güterströme innerhalb des Sektors haben jedoch auf das Ergebnis der Triangulation keinen Einfluss.

9. Zur Beurteilung von Triangulationen sind verschiedene Maßzahlen vorgeschlagen worden.[28] Am häufigsten wird der *Linearitätsgrad* verwendet, der als Quotient

$$\text{Linearitätsgrad} := \frac{\sum_{i<j} b_{ij}}{\sum_{i \neq j} b_{ij}}$$

definiert ist, wobei sich die Koeffizienten b_{ij} auf die triangulierte Vorleistungsmatrix beziehen. Im Zähler steht die Summe der Einträge oberhalb der Hauptdiagonalen, im Nenner steht die Summe aller Einträge ohne diejenigen in der Hauptdiagonalen. Dieser Linearitätsgrad kann Werte zwischen 0 und 1 annehmen. Der maximale Wert 1 wird erreicht, wenn die Vorleistungsmatrix in eine obere Dreiecksmatrix permutiert werden kann, d.h. wenn der korrespondierende Graph linear ist. In unserem Beispiel findet man den Linearitätsgrad

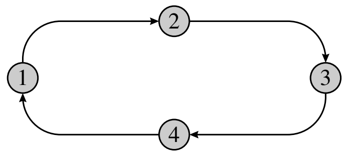
$$\frac{1700016}{2042522} = 0.83$$

Helmstädter u.a. (1983, S. 87 f.) berichten von Berechnungen auf der Grundlage von Input-Output-Tabellen des DIW mit 14 Wirtschaftssektoren für den Zeitraum 1954 – 1974, bei denen der Linearitätsgrad zwischen 0.74 und 0.78 lag. Man kann jedoch nicht die Schlußfolgerung ziehen, dass der Linearitätsgrad inzwischen zugenommen hat. Denn nicht nur sind die neueren Input-Output-Tabellen des Statistischen Bundesamts mit den älteren Tabellen des DIW kaum vergleichbar. Das Ergebnis einer Triangulation hängt auch vom Aggregationsniveau einer Input-Output-Tabelle ab. Wiederholt man z.B. die oben beschriebene Prozedur mit der aggregierten A-Tabelle für 1995, findet man einen Linearitätsgrad von 0.8.

[28] Einen Überblick findet man bei W. Holub und Schnabl (1994, S. 175 ff.).

9.3.3 Berechnung von Weglängen

1. Es wurde bereits besprochen, dass die Vorleistungsmatrix der Input-Output-Tabelle 1995 im wesentlichen nur aus einer Komponente besteht. Sieht man von den beiden isolierten Sektoren Nr. 6 und Nr. 59 ab, ist jeder Sektor mit jedem anderen Sektor durch mindestens einen Weg verbunden. Dies allein sagt allerdings noch nicht viel über den Grad der Verflechtung. Das wird deutlich, wenn man zwei Grenzfälle vergleicht. Einerseits eine Clique, in der jeder Knoten jeden anderen durch einen Weg der Länge 1 erreichen kann. Andererseits ein Graph, der z.B. folgendermaßen aussieht:



In diesem Fall gibt es Weglängen zwischen 1 und $n-1$. Sinnvolle Hinweise auf den Grad der Verflechtung erhält man also, indem man für jeweils zwei Knoten bzw. Sektoren i und j die Länge des kürzesten Weges berechnet, der von i zu j führt, und sich dann eine Übersicht über alle kürzesten Wege verschafft.

2. Um zu zeigen, wie die Berechnungen durchgeführt werden können, beziehen wir uns auf die A-Tabelle für 1995. Box 9.3.4 zeigt das für die Berechnungen verwendete Skript. Zunächst wird die Vorleistungsmatrix `A` gebildet. Da der `gsp`-Befehl zur Berechnung kürzester Wege voraussetzt, dass der Graph durch eine Kantenliste definiert wird, wird im nächsten Schritt mit dem `mcel`-Befehl aus der Matrix `A` eine neue Matrix `L` gebildet, die in Form einer Kantenliste aufgebaut ist. Sie enthält drei Spalten: In den ersten beiden Spalten befinden sich die Knotennummern, in der dritten Spalte der Wert der sie verbindenden Kante. Als gültige Kanten werden alle Koeffizienten der Matrix `A` verwendet, deren Wert mindestens gleich 1 ist (definiert durch den zweiten Parameter des `mcel`-Befehls). Die Kantenliste `L` wird dann in ein Datenfile `klist` geschrieben, aus dem im nächsten Schritt eine Datenmatrix mit drei Variablen gebildet werden kann, die den drei Spalten von `L` entsprechen. Im Anschluss kann der `gdd`-Befehl verwendet werden, um einen gerichteten Graphen zu definieren. Außerdem wird angegeben, dass der Graph unbewertet sein soll, d.h. jede Kante bekommt den Wert 1.[29] Schließlich kann der `gsp`-Befehl verwendet werden, um für jedes Knotenpaar, dessen Knoten durch mindestens einen Weg verbunden sind, den kürzesten Weg und dessen Länge zu berechnen. Die Parameter

[29] Dies ist erforderlich, weil der `gsp`-Befehl zur Berechnung von Weglängen die Kantenbewertungen addiert. In unserem Anwendungsfall soll jedoch die Länge eines Wegs durch die Anzahl der in ihm enthaltenden Kanten definiert sein.

Box 9.3.4 Skript zur Berechnung kürzester Wege in der A-Tabelle für 1995.

```
mdef(A,59,59) = iot95ip.dat;     # A = Vorleistungsmatrix
mcel(A,1,L);                     # Bildung einer Kantenliste L
mpr(L) = klist;                  # Ausdruck in das Datenfile klist
nvar(                            # Einlesen als Datenmatrix
    dfile = klist,               # Name des Datenfiles
    noc = 3600,                  # Maximale Anzahl Zeilen
    I = c1,                      # Variable I aus Spalte 1
    J = c2,                      # Variable J aus Spalte 2
    V = c3,                      # Variable V aus Spalte 3
);
gdd(                             # Definition eines gerichteten
    gt = 3,                      # aber unbewerteten Graphen
) = I,J,V;                       # aus diesen Variablen

gsp(                             # Befehl zur Berechnung kuerzester
    opt = 3,                     # Wege. Ausdruck als quadratische
    fmt = 2.0,                   # Matrix mit diesem Druckformat
) = gsp.dat;                     # Ausgabe in dieses Datenfile
```

geben an, dass die Ausgabe in Form einer quadratischen Matrix $\mathbf{W} = (w_{ij})$ erfolgen soll, wobei die Koeffizienten folgendermaßen definiert sind: Wenn $w_{ij} > 0$ ist, dann gibt es einen Weg von i nach j und w_{ij} gibt die Länge des kürzesten Weges an; wenn dagegen $w_{ij} = 0$ ist, dann gibt es keinen Weg von i nach j.[30] Da bei der Berechnung isolierte Knoten ignoriert werden, hat in unserem Beispiel die Matrix $\mathbf{W}$ 57 Zeilen und Spalten.

3. Um ein übersichtliches Bild zu gewinnen, ist es zweckmäßig, eine Häufigkeitsverteilung der Weglängen zu berechnen. Ignoriert man die Einträge in der Hauptdiagonalen von $\mathbf{W}$, bleiben $57 \cdot 56 = 3192$ mögliche Weglängen. Die Häufigkeitsverteilung sieht folgendermaßen aus:

Weglänge	Anzahl
1	2322
2	853
3	17

So erkennt man, dass die Vorleistungsverflechtung in der A-Tabelle sehr groß ist. Zwischen den meisten Sektoren gibt es unmittelbare Lieferzusammenhänge.

[30]Schlingen werden ignoriert, d.h. für die Koeffizienten in der Hauptdiagonalen gilt immer $w_{ii} = 0$.

Kapitel 10

Berechnungen mit Input-Output-Tabellen

In diesem Kapitel wird an die in Kap. 6 besprochenen Modelle gesellschaftlicher Produktion angeknüpft (infolgedessen sind auch die mathematischen Hilfsmittel weitgehend identisch). Während es dort um die Frage ging, wie man sich ein modellhaftes Bild gesellschaftlicher Produktion machen kann, besteht das Ziel dieses Kapitels darin, einige der Zusammenhänge anhand von Input-Output-Tabellen nachzuvollziehen. Dafür beziehen wir uns wie bisher auf die Input-Output-Tabelle 1995 des Statistischen Bundesamts.[1] Unterschiede ergeben sich natürlich daraus, dass bei der Konstruktion der Modelle in Kap. 6 von einer institutionellen Gliederung ausgegangen wurde, so dass man sich jeden Sektor als ein Unternehmen vorstellen kann, das eine bestimmte Gütersorte produziert. Andererseits orientieren sich die Input-Output-Tabellen des Statistischen Bundesamts an einer funktionellen Gliederung, bei der jeder Sektor einen Bereich ähnlicher Güter zusammenfasst. Dies muss bei der Interpretation der Rechenergebnisse berücksichtigt werden.

10.1 Buchführungsgleichungen

1. Wir beginnen mit einer Erinnerung an die elementaren Buchführungsgleichungen, die bei der Konstruktion von Input-Output-Tabellen zugrunde gelegt werden. Um die Gleichungen anhand konkreter Zahlen nachvollziehbar zu machen, beziehen wir uns auf die aggregierten Tabellen, die in Abschnitt 9.2 beschrieben wurden. Als Beispiel dient die Produktion, der Import und die Verwendung landwirtschaftlicher Güter (Bereich 1 in der aggregierten Tabelle). Wir beginnen mit der A-Tabelle (Tab. 9.2.3). Die Entstehungsseite erscheint dann in folgender Form:

	Vorleistungen aus inländischer Produktion	35650	(Z13)
+	Vorleistungen aus Importen	5927	(Z14)
+	Gütersteuern abzüglich Gütersubventionen	2012	(Z15)
=	Vorleistungen zu Anschaffungspreisen	43589	(Z16)

Diese Gleichung liefert die Gesamtheit der Vorleistungen, die der Bereich Landwirtschaft für seine inländische Produktion verwendet hat.[2] Durch

[1]Auf ihre Dokumentation wird auch weiterhin mit der Abkürzung FS 18, R. 2–1995 hingewiesen.

[2]In Klammern wird mit Z und S auf die Zeilen und Spalten der aggregierten A-Tabelle,

Hinzufügen der Bruttowertschöpfung (Summe der Zeilen 17 – 19) entsteht der Produktionswert:

	Vorleistungen zu Anschaffungspreisen	43589	(Z16)
+	Bruttowertschöpfung	42286	(Z20)
=	Produktionswert	85875	(Z21)

Wenn man von der Verrechnung der Steuern und Subventionen absieht, drückt diese Größe den Gesamtwert der im Inland produzierten landwirtschaftlichen Güter aus.[3] Jetzt betrachten wir die Verwendungsseite, also die Spalten der A-Tabelle:

	Als Vorleistungen verwendete Güter	56584	(S13)
+	Konsum aus inländischer Produktion	21989	(S14–17)
+	Exporte aus inländischer Produktion	7302	(S18)
=	Produktionswert	85875	(S20)

In der ersten Zeile steht die Gesamtheit der vom Bereich Landwirtschaft produzierten Güter, die im Inland (von irgendwelchen Bereichen) als Vorleistungen verwendet worden sind. Somit zeigt das Schema, wie die inländische Produktion landwirtschaftlicher Güter verwendet wurde.

2. Das Schema liefert jedoch keinen vollständigen Aufschluß über die gesamte Verwendung landwirtschaftlicher Güter, denn ein Teil dieser Güter stammt auch aus Importen, die in der A-Tabelle nicht direkt sichtbar sind. Darüber informiert zunächst die Import-Tabelle (Tab. 9.2.5). Aus dieser Tabelle kann man erkennen:

	Als Vorleistungen verwendete Importe	19528	(SI13)
+	Für Konsum und Investitionen verwendete Importe	10406	(SI14–17)
+	Zum Export verwendete Importe	1379	(SI18)
=	Gesamtimport landwirtschaftlicher Güter	31313	(SI20)

Somit erhält man auch Aufschluß über den Gesamtexport landwirtschaftlicher Güter, nämlich 7302 Mio. DM aus inländischer Produktion und 1379 Mio. DM aus Importen, insgesamt also 8681 Mio. DM.

3. Weitere Informationen erhält man aus der A*-Tabelle (Tab. 9.2.4). Zunächst findet man aus Spalte 13, dass insgesamt landwirtschaftliche Güter im Wert von 76112 Mio. DM als Vorleistungen (in allen Bereichen) verwendet worden sind. Wie die Import-Tabelle zeigt, stammt jedoch ein Teil davon, nämlich 19528 Mio. DM, aus Importen. Die Differenz in Höhe von 56584 Mio. DM sind die im Inland produzierten landwirtschaftlichen

mit Z*und S*auf die Zeilen und Spalten der aggregierten A*-Tabelle und mit ZI und SI auf die Zeilen und Spalten der Import-Tabelle hingewiesen.

[3] Wie bereits erklärt worden ist, enthält dieser Produktionswert die importierten Vorleistungen.

Güter, die als Vorleistungen verwendet werden (wie bereits die Betrachtung der A-Tabelle gezeigt hat, vgl.o.), also:

	Vorleistungen landw. Güter aus inl. Produktion	56584	(S13)
+	Vorleistungen landw. Güter aus Importen	19528	(SI13)
=	Insgesamt verwendete Vorleistungen	76112	(S*13)

Weiterhin erhält man auch den in der A*-Tabelle ausgewiesenen Gesamtkonsum landwirtschaftlicher Güter in Höhe von 32395 Mio. DM aus den Angaben in der A-Tabelle und der Import-Tabelle:

	Konsum aus inländischer Produktion	21989	(S14–17)
+	Konsum aus Importen	10406	(SI14–17)
=	Gesamtkonsum landwirtschaftlicher Güter	32395	(S*14–17)

4. Jetzt wird auch der Zusammenhang zwischen der Entstehungs- und Verwendungsseite der A*-Tabelle deutlicher. Zunächst zeigt die Entstehungsseite:

	Vorleistungen einschl. importierte Vorleistungen	43589	(Z*15)
+	Bruttowertschöpfung	42286	(Z*19)
=	Produktionswert	85875	(Z*20)

Die erste Zeile zeigt die insgesamt verwendeten Vorleistungen, sowohl aus inländischer Produktion als auch aus Importen (entsprechend den Angaben in der A-Tabelle, vgl.o.). Auch die Angaben für die Bruttowertschöpfung und den Produktionswert stimmen mit denjenigen in der A-Tabelle überein. Addiert man nun zum Produktionswert die Gesamtimporte landwirtschaftlicher Güter, erhält man die gesamte Verwendung landwirtschaftlicher Güter:

	Produktionswert	85875	(Z*20)
+	Importe landwirtschaftlicher Güter	31313	(Z*21)
=	Gesamte Verwendung landwirtschaftlicher Güter	117188	(Z*22)

Schließlich liefert die Verwendungsseite der A*-Tabelle folgende Zusammenhänge:

	Insgesamt verwendete Vorleistungen	76112	(S*13)
+	Gesamter Konsum landwirtschaftlicher Güter	32395	(S*14–17)
+	Exporte landwirtschaftlicher Güter	8681	(S*18)
=	Gesamte Verwendung landwirtschaftlicher Güter	117188	(S*20)

5. Für die weiteren Überlegungen ist es nützlich, einige der eben am Beispiel der Produktion und Verwendung landwirtschaftlicher Güter erläuterten Buchführungsgleichungen in allgemeiner Weise zu formulieren. Wir verwenden folgende Notationen:

$\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^*$ bezeichnen die Vorleistungsmatrizen in den A- bzw. A*-Tabellen.

$\mathbf{x}$ bezeichnet einen Spaltenvektor, so dass x_i der Produktionswert des Bereichs i ist.

$\mathbf{k}$ bezeichnet einen Spaltenvektor, so dass k_i den Konsum und die Investitionen aus der inländischen Produktion des Bereichs i erfasst.

$\mathbf{e}$ bezeichnet einen Spaltenvektor, so dass e_i der Export aus der inländischen Produktion des Bereichs i ist.

$\mathbf{y} := \mathbf{k} + \mathbf{e}$ bezeichnet die Summe aus Konsum und Exporten.

Mithilfe dieser Notationen können die Buchführungsgleichungen für die Verwendungsseite der A-Tabelle in folgender Weise geschrieben werden:[4]

$$\mathbf{A1} + \mathbf{k} + \mathbf{e} \;=\; \mathbf{A1} + \mathbf{y} \;=\; \mathbf{x} \qquad (10.1.1)$$

10.2 Input- und Output-Koeffizienten

1. Die Einträge in Input-Output-Tabellen beziehen sich auf die gesamten Güterströme, die es im Darstellungszeitraum zwischen den Produktionsbereichen gegeben hat. Für viele Berechnungen ist es zweckmäßig, sie stattdessen als Anteile an den jeweiligen Produktionswerten darzustellen. Diese Idee führt zu Input- bzw. Output-Koeffizienten. Input-Koeffizienten werden folgendermaßen definiert:

$$\pi_{ij} \;:=\; \frac{a_{ij}}{x_j}$$

Ein Input-Koeffizient π_{ij} gibt also an, wie viele Vorleistungen aus dem Bereich i vom Bereich j im Durchschnitt verwendet worden sind, um „eine Einheit“ seiner Produktion (der j-ten Gütergruppe) herzustellen. Was hierbei „eine Einheit“ bedeutet, hängt natürlich davon ab, in welchen Preisen und Einheiten die Vorleistungen und Produktionswerte in der Input-Output-Tabelle angegeben werden; in unserem Beispiel: 1 Mio. DM in Herstellungspreisen.

2. Zur Illustration beziehen wir uns auf die aggregierte A-Tabelle. Man findet z.B.:

$$a_{31} = 4116, \;\; x_1 = 85875, \text{ also: } \pi_{31} = \frac{4116}{85875} = 0.0479$$

[4] Das Symbol **1** soll wie bisher einen Spaltenvektor bezeichnen, dessen Koeffizienten nur aus Einsen bestehen.

Box 10.2.1 Skript zur Berechnung von Input-Koeffizienten (A-Tabelle).

```
mfmt = 12.4;                       Einstellen des Druckformats
mdef(IOT,12,20) = iot95ip.agg;     Einlesen der Tabelle
mdef(A,12,12)   = iot95ip.agg;     Einlesen der Vorleistungsmatrix
mscol(IOT,<20>,X);                 Spaltenvektor X: Produktionswert
mdiag(X,XD);                       XD = diag(X)
minvd(XD,XDI);                     XDI = Inverse von XD
mmul(A,XDI,PI);                    PI = A * XDI
mpr(PI);                           Ausdruck
```

D.h., um landwirtschaftliche Güter im Wert von 1 Mio. DM zu produzieren, wurden im Durchschnitt Güter im Wert von 47900 DM aus dem Bereich 3 (chemische Industrie u.a.) verwendet.

3. Die Gesamtheit der Input-Koeffizienten kann in einer Matrix $\mathbf{\Pi} = (\pi_{ij})$ angeordnet werden, die von der gleichen Ordnung ist wie die Matrix $\mathbf{A}$. Mithilfe der im vorangegangenen Abschnitt eingeführten Notationen erhält man auch eine einfache Formel zur Berechnung:

$$\mathbf{\Pi} \;=\; \mathbf{A}\,\mathbf{X}^{-1}$$

wobei $\mathbf{X}$ eine Diagonalmatrix ist, in deren Hauptdiagonale sich die Koeffizienten des Vektors $\mathbf{x}$ (der Produktionswerte) befinden. Also gilt auch $\mathbf{\Pi}\,\mathbf{X} = \mathbf{A}$, und man erhält die Gleichung

$$\mathbf{A1} \;=\; \mathbf{\Pi}\,\mathbf{X1} \;=\; \mathbf{\Pi}\,\mathbf{x}$$

Somit kann man auch die Gleichung (10.1.1) mithilfe von Input-Koeffizienten schreiben:

$$\mathbf{\Pi}\,\mathbf{x} + \mathbf{k} + \mathbf{e} \;=\; \mathbf{\Pi}\,\mathbf{x} + \mathbf{y} \;=\; \mathbf{x}$$

Durch eine Umformung erhält man schließlich

$$\mathbf{y} \;=\; (\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})\,\mathbf{x} \qquad (10.2.1)$$

wobei $\mathbf{I}$ eine Einheitsmatrix passender Ordnung ist. Die Input-Koeffizienten liefern also einen Zusammenhang zwischen der Bruttoproduktion $\mathbf{x}$ (den Produktionswerten) und der Nettoproduktion $\mathbf{y}$ (Konsum und Exporte).

4. In späteren Abschnitten wird an diese Gleichung angeknüpft. An dieser Stelle besprechen wir, wie man die Matrix der Input-Koeffizienten praktisch berechnen kann. Dazu kann das in Box 10.2.1 angegebene Skript dienen.[5] Als Ergebnis erhält man die Matrix $\mathbf{\Pi}$ (im Skript `PI` genannt);

[5] In diesem Skript wird die aggregierte A-Tabelle verwendet. Mit geringfügigen Modifikationen kann das Skript auch verwendet werden, um Input-Koeffizienten für die nicht-aggregierte Tabelle zu berechnen.

Tabelle 10.2.1 Input-Koeffizienten der aggregierten A- und A*-Tabellen.

Input-Koeffizienten A-Tabelle

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0.0261	0.0006	0.0003	0.0000	0.0000	0.0081	0.1961	0.0000	0.0011	0.0011	0.0012	0.0017
2	0.0279	0.1322	0.0499	0.0344	0.0103	0.0217	0.0184	0.0103	0.0120	0.0029	0.0107	0.0073
3	0.0479	0.0124	0.1681	0.0350	0.0378	0.0391	0.0202	0.1336	0.0097	0.0015	0.0121	0.0186
4	0.0072	0.0179	0.0167	0.2174	0.0760	0.0114	0.0111	0.0445	0.0045	0.0006	0.0043	0.0020
5	0.0199	0.0408	0.0148	0.0293	0.1953	0.0083	0.0068	0.0430	0.0159	0.0030	0.0243	0.0079
6	0.0040	0.0042	0.0147	0.0105	0.0137	0.1830	0.0224	0.0321	0.0166	0.0095	0.0125	0.0117
7	0.0747	0.0001	0.0078	0.0001	0.0002	0.0002	0.1367	0.0001	0.0205	0.0001	0.0117	0.0038
8	0.0094	0.0241	0.0064	0.0085	0.0034	0.0051	0.0045	0.0162	0.0098	0.0341	0.0210	0.0117
9	0.0867	0.0418	0.0569	0.0781	0.0625	0.0808	0.0906	0.0568	0.1336	0.0156	0.0371	0.0565
10	0.0797	0.1001	0.1088	0.0581	0.0768	0.0943	0.0936	0.1219	0.1254	0.2854	0.0722	0.0517
11	0.0250	0.0045	0.0073	0.0038	0.0014	0.0053	0.0063	0.0022	0.0074	0.0050	0.0178	0.2712
12	0.0065	0.0519	0.0072	0.0056	0.0035	0.0142	0.0074	0.0047	0.0134	0.0171	0.0132	0.0398

Input-Koeffizienten A*-Tabelle

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0.0308	0.0006	0.0021	0.0000	0.0000	0.0129	0.2602	0.0000	0.0018	0.0011	0.0023	0.0020
2	0.0313	0.1490	0.1056	0.0517	0.0109	0.0239	0.0200	0.0112	0.0125	0.0031	0.0114	0.0078
3	0.0849	0.0202	0.2654	0.0491	0.0520	0.0640	0.0273	0.1544	0.0140	0.0030	0.0186	0.0258
4	0.0093	0.0198	0.0218	0.3306	0.0989	0.0156	0.0126	0.0530	0.0054	0.0008	0.0056	0.0023
5	0.0248	0.0510	0.0174	0.0351	0.2882	0.0118	0.0077	0.0518	0.0196	0.0038	0.0297	0.0100
6	0.0059	0.0049	0.0200	0.0130	0.0168	0.2852	0.0262	0.0394	0.0198	0.0103	0.0146	0.0133
7	0.0846	0.0001	0.0120	0.0001	0.0002	0.0004	0.1732	0.0001	0.0251	0.0001	0.0146	0.0048
8	0.0095	0.0264	0.0080	0.0085	0.0034	0.0051	0.0046	0.0206	0.0098	0.0343	0.0211	0.0117
9	0.0897	0.0443	0.0617	0.0818	0.0648	0.0835	0.0927	0.0583	0.1506	0.0164	0.0377	0.0583
10	0.0818	0.1031	0.1161	0.0592	0.0782	0.0961	0.0942	0.1283	0.1261	0.2980	0.0762	0.0533
11	0.0250	0.0045	0.0079	0.0038	0.0014	0.0053	0.0063	0.0025	0.0082	0.0050	0.0189	0.2721
12	0.0065	0.0519	0.0072	0.0056	0.0035	0.0142	0.0074	0.0047	0.0134	0.0171	0.0132	0.0458

die obere Hälfte der Tabelle 10.2.1 zeigt die Werte.[6]

5. Input-Koeffizienten können in analoger Weise für die A*-Tabelle definiert werden:

$$\pi^*_{ij} := \frac{a^*_{ij}}{x_j}$$

π^*_{ij} gibt an, wie viele Vorleistungen, und zwar sowohl inländische als auch importierte Vorleistungen, aus dem Bereich i vom Bereich j im Durchschnitt verwendet worden sind, um „eine Einheit“ seiner Produktion herzustellen. Auch die Berechnung erfolgt analog, nämlich durch

$$\mathbf{\Pi}^* = \mathbf{A}^* \mathbf{X}^{-1}$$

Die untere Hälfte von Tabelle 10.2.1 zeigt die Rechenergebnisse. Z.B. ist $\pi^*_{31} = 0.0849$ im Unterschied zu $\pi_{31} = 0.0479$.

6. Als komplementäre Begriffsbildung lassen sich Output-Koeffizienten definieren. Für die A-Tabelle lautet die Definition:

$$\tilde{\pi}_{ij} := \frac{a_{ij}}{x_i}$$

$\tilde{\pi}_{ij}$ gibt also an, welcher Anteil der Güterproduktion im Bereich i in Form von Vorleistungen im Bereich j verwendet wird. Die Berechnung erfolgt, indem die Reihenfolge der Multiplikation vertauscht wird:

$$\tilde{\mathbf{\Pi}} = \mathbf{X}^{-1} \mathbf{A}$$

Wiederum in analoger Weise lassen sich auch Output-Koeffizienten für die A*-Tabelle definieren und berechnen.

[6]Man findet diese Matrix auch in FS 18, R. 2–1995, S. 62.

Box 10.3.1 Skript zur Berechnung von $(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})^{-1}$ (A-Tabelle).

```
mfmt = 12.4;                          Einstellen des Druckformats
mdef(IOT,12,20) = iot95ip.agg;        Einlesen der Tabelle
mdef(A,12,12)   = iot95ip.agg;        Einlesen der Vorleistungsmatrix
mscol(IOT,<20>,X);                    Spaltenvektor X: Produktionswert
mdiag(X,XD);                          XD = diag(X)
minvd(XD,XDI);                        XDI = Inverse von XD
mmul(A,XDI,PI);                       PI = A * XDI
mdefi(12,12,I);                       I = Einheitsmatrix
mexpr(I - PI,IPI);                    IPI = I - PI
mginv(IPI,IPINV);                     IPINV = Inverse von IPI
mpr(IPINV);                           Ausdruck
```

10.3 Verwendete Güter und Arbeitsleistungen

Güterproduktion erfordert Vorleistungen und Arbeitsleistungen. Wie in Kap. 6 besprochen wurde, kann man in beiden Fällen nicht nur die direkten, sondern auch die indirekten Aufwendungen berücksichtigen. In den folgenden Abschnitten wird dieser Gedanke anhand der aggregierten Tabellen für 1995 näher verfolgt und durch Berechnungen illustriert.

10.3.1 Zurechnung von Vorleistungen

1. Wir beginnen mit der Berechnung direkter und indirekter Vorleistungen. Wie in Abschnitt 6.1.3 besprochen wurde, erhält man sie durch die Formel

$$\bar{\mathbf{\Pi}} = (\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})^{-1} - \mathbf{I} \qquad (10.3.1)$$

Sie kann natürlich nur verwendet werden, wenn die Matrix $(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})$ invertierbar und ihre Inverse nicht-negativ ist. Eine hinreichende Bedingung dafür besteht z.B. darin, dass in jeder Komponente von $\mathbf{\Pi}$ keine Spaltensumme größer als 1 und mindestens eine Spaltensumme kleiner als 1 ist (vgl. Anhang A.3). Da in unserem Beispiel alle Spaltensummen kleiner als 1 sind, ist die Invertierbarkeit also gewährleistet.

2. Box 10.3.1 zeigt ein Skript zur Berechnung von $\bar{\mathbf{\Pi}}$ für die aggregierte A-Tabelle. Zunächst werden, wie bereits in Box 10.2.1 gezeigt wurde, die Input-Koeffizienten berechnet. Dann wird die Matrix $(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})$ gebildet und mit dem `mginv`-Befehl invertiert. Die obere Hälfte von Tabelle 10.3.1 zeigt das Ergebnis. Man erkennt, dass die inverse Matrix nur nicht-negative Koeffizienten enthält.[7]

3. Außerhalb der Hauptdiagonalen entsprechen die Elemente der Tabelle

[7] Die Zahlen findet man auch in FS 18, R. 2–1995, S. 64.

Tabelle 10.3.1 $(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})^{-1}$ für die aggregierten A- und A*-Tabellen.

A-Tabelle

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1.0465	0.0020	0.0039	0.0015	0.0015	0.0119	0.2394	0.0018	0.0078	0.0022	0.0050	0.0050
2	0.0448	1.1601	0.0755	0.0592	0.0274	0.0397	0.0422	0.0300	0.0214	0.0082	0.0179	0.0185
3	0.0728	0.0322	1.2136	0.0647	0.0688	0.0671	0.0541	0.1765	0.0231	0.0140	0.0251	0.0370
4	0.0198	0.0372	0.0336	1.2886	0.1262	0.0247	0.0269	0.0712	0.0131	0.0063	0.0128	0.0107
5	0.0369	0.0670	0.0326	0.0564	1.2544	0.0224	0.0268	0.0664	0.0288	0.0107	0.0366	0.0254
6	0.0167	0.0152	0.0297	0.0250	0.0296	1.2329	0.0433	0.0513	0.0300	0.0205	0.0217	0.0258
7	0.0950	0.0031	0.0140	0.0043	0.0040	0.0055	1.1840	0.0045	0.0291	0.0016	0.0161	0.0117
8	0.0212	0.0387	0.0201	0.0208	0.0147	0.0177	0.0206	1.0295	0.0216	0.0509	0.0285	0.0258
9	0.1350	0.0801	0.1010	0.1362	0.1166	0.1345	0.1699	0.1031	1.1745	0.0365	0.0600	0.0956
10	0.1864	0.2086	0.2322	0.1630	0.1888	0.2152	0.2439	0.2475	0.2325	1.4261	0.1372	0.1442
11	0.0349	0.0268	0.0175	0.0126	0.0086	0.0175	0.0231	0.0108	0.0174	0.0156	1.0254	0.2926
12	0.0171	0.0691	0.0200	0.0169	0.0130	0.0272	0.0215	0.0154	0.0231	0.0273	0.0193	1.0514

A*-Tabelle

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	1.0646	0.0033	0.0117	0.0039	0.0037	0.0230	0.3383	0.0045	0.0138	0.0029	0.0092	0.0084
2	0.0686	1.1924	0.1847	0.1156	0.0539	0.0673	0.0664	0.0580	0.0293	0.0119	0.0255	0.0274
3	0.1495	0.0619	1.3946	0.1282	0.1324	0.1463	0.1122	0.2465	0.0427	0.0244	0.0457	0.0629
4	0.0372	0.0578	0.0663	1.5214	0.2223	0.0508	0.0469	0.1102	0.0228	0.0108	0.0232	0.0193
5	0.0585	0.0998	0.0615	0.0968	1.4319	0.0449	0.0471	0.0987	0.0434	0.0164	0.0533	0.0386
6	0.0301	0.0241	0.0554	0.0454	0.0519	1.4175	0.0669	0.0776	0.0437	0.0275	0.0313	0.0366
7	0.1168	0.0053	0.0264	0.0085	0.0078	0.0111	1.2528	0.0084	0.0392	0.0025	0.0221	0.0165
8	0.0252	0.0446	0.0312	0.0284	0.0207	0.0238	0.0264	1.0386	0.0238	0.0530	0.0304	0.0279
9	0.1598	0.0972	0.1431	0.1838	0.1575	0.1759	0.2096	0.1272	1.2067	0.0425	0.0697	0.1081
10	0.2274	0.2401	0.3192	0.2271	0.2515	0.2827	0.3020	0.2976	0.2562	1.4587	0.1587	0.1657
11	0.0382	0.0289	0.0246	0.0176	0.0125	0.0227	0.0293	0.0141	0.0200	0.0165	1.0277	0.2970
12	0.0209	0.0728	0.0305	0.0244	0.0184	0.0345	0.0268	0.0197	0.0252	0.0286	0.0209	1.0597

bereits den Elementen von $\bar{\mathbf{\Pi}}$, in der Hauptdiagonalen muss der Wert 1 abgezogen werden. Zur Interpretation ist es zweckmäßig, die Tabellen 10.2.1 und 10.3.1 zu vergleichen. Z.B. erkennt man, dass zur Produktion von 1 Mio. DM landwirtschaftlicher Güter die direkten Vorleistungen aus dem Bereich 5 (Maschinen, Fahrzeuge usw.) 19900 DM, die direkten und indirekten Vorleistungen jedoch 36900 DM betragen. Noch deutlicher ist der Unterschied bei den Vorleistungen aus dem Bereich 10 (Dienstleistungen der Kreditinstitute und Versicherungen u.ä.). Die direkten Vorleistungen betragen in diesem Fall 79700 DM, die direkten und indirekten Vorleistungen 186400 DM.

10.3.2 Zurechnung des Arbeitsaufwands

1. Jetzt soll versucht werden, den direkten und indirekten Arbeitsaufwand zu berechnen. Der Grundgedanke wurde bereits in Abschnitt 6.2.1 besprochen. Die Idee besteht darin, für jede Gütersorte j eine Größe $\bar{w}_j$ zu berechnen, die angibt, wie viel Arbeit zur Produktion einer Gütereinheit sowohl direkt als auch indirekt aufgewendet wird. Wie in Abschnitt 6.2.1 gezeigt wurde, kann die Berechnung mit folgender Formel vorgenommen werden:

$$\bar{\mathbf{w}}' = \mathbf{w}'(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})^{-1} \qquad (10.3.2)$$

Es ist also nur erforderlich, die Matrix $(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})^{-1}$ von links mit dem Vektor $\mathbf{w}'$ zu multiplizieren, dessen Koeffizienten den direkten Arbeitsaufwand erfassen.

2. Allerdings muss überlegt werden, wie sich der direkte Arbeitsaufwand erfassen lässt. Angaben über die in den einzelnen Sektoren der Input-Output-Tabelle eingesetzten Arbeitsstunden gibt es leider nicht. Aus den Veröffentlichungen des Statistischen Bundesamts lässt sich nur entnehmen, wie viele Erwerbstätige bzw. Arbeitnehmer in den Sektoren im Jahresdurchschnitt beschäftigt waren. Die obere Hälfte von Tabelle 10.3.2 zeigt die verfügbaren Informationen für die nicht-aggregierte Tabelle 1995;[8] in der unteren Hälfte haben wir sie entsprechend der in Abschnitt 9.2 besprochenen Aggregation zusammengefasst. Wie die Tabelle zeigt, unterscheidet das Statistische Bundesamt zwischen Erwerbstätigen und Arbeitnehmern. Dazu gibt es folgende Erläuterungen (FS 18, R. 2–1995, S. 23):

„Als *Erwerbstätige* werden alle Personen angesehen, die einer oder auch mehreren Erwerbstätigkeiten nachgehen, unabhängig von der Dauer der tatsächlich geleisteten oder vertragsmäßig zu leistenden wöchentlichen Arbeitszeit. Für die Zuordnung als Erwerbstätiger ist es unerheblich, ob aus dieser Tätigkeit der überwiegende Lebensunterhalt bestritten wird oder nicht. Zu den Erwerbstätigen gehören auch Soldaten (einschließlich der Wehr- und Zivildienstleistenden).

[8] FS 18, R. 2–1995, S. 184.

Tabelle 10.3.2 Anzahl der Erwerbstätigen (E) und Arbeitnehmer (A) im Inland 1995 nach Sektoren (i). Jahresdurchschnitt in 1000.

i	E	A	i	E	A	i	E	A	i	E	A
1	1043	438	16	482	460	31	9	8	46	213	97
2	46	41	17	23	23	32	262	262	47	308	249
3	7	4	18	470	467	33	51	51	48	59	51
4	131	131	19	394	385	34	3236	2896	49	278	242
5	5	5	20	338	322	35	760	675	50	138	129
6	0	0	21	318	316	36	1704	1556	51	2236	1859
7	0	0	22	819	757	37	3370	2815	52	2950	2950
8	43	40	23	1166	1137	38	1315	965	53	1942	1878
9	915	822	24	60	59	39	1013	955	54	3230	2955
10	15	15	25	514	506	40	25	22	55	165	161
11	181	175	26	206	203	41	46	46	56	427	427
12	125	115	27	349	328	42	417	352	57	530	399
13	39	37	28	615	612	43	601	591	58	526	349
14	214	186	29	143	142	44	786	786	59	436	436
15	160	158	30	334	310	45	240	240			

Nach Sektoren der aggregierten Tabelle

1	1096	483	4	1137	1073	7	930	837	10	4258	3653
2	492	489	5	3053	2987	8	3236	2896	11	5337	4994
3	1225	1197	6	1544	1449	9	9251	7977	12	4869	4561

Im Fall mehrerer (gleichzeitiger) Tätigkeiten wird der Erwerbstätige nur einmal gezählt. Sowohl für die Zuordnung nach der Stellung im Beruf (Arbeitnehmer oder Selbständiger), als auch für die Zuordnung auf Wirtschaftsbereiche wird die zeitlich überwiegende Tätigkeit zugrunde gelegt. Nicht zu den Erwerbstätigen rechnen Personen in ihrer Eigenschaft als Grundstücks-, Haus- und Wohnungseigentümer oder als Eigentümer von Wertpapieren und ähnlichen Vermögenswerten. [...]

Als *Arbeitnehmer* zählt, wer als Arbeiter, Angestellter, Beamter, Richter, Berufssoldat, Soldat auf Zeit, Wehr- oder Zivildienstleistender, Auszubildender, Praktikant oder Volontär in einem Arbeits- oder Dienstverhältnis steht und hauptsächlich diese Tätigkeit ausübt. Eingeschlossen sind auch Heimarbeiter.“

In den folgenden Berechnungen verwenden wir zur Erfassung des direkten und indirekten Arbeitsaufwands die Anzahl der Erwerbstätigen.

3. Ein weiteres Problem betrifft die importierten Vorleistungen, deren Produktion natürlich ebenfalls Arbeitsleistungen erfordert. Darüber sind jedoch überhaupt keine Informationen verfügbar, so dass es nicht möglich ist, den wirklichen gesamten Arbeitsaufwand zu berechnen. Man kann aber eine etwas andere Fragestellung verfolgen: Wieviel Arbeitsleistungen im Inland direkt und indirekt für die Herstellung einer Gütereinheit einer jeweils bestimmten Gütergruppe aufgewendet worden sind. Dementsprechend gehen wir zur Berechnung von der A-Tabelle aus.

4. Box 10.3.2 zeigt das zur Berechnung verwendete Skript. Zunächst wird

Box 10.3.2 Skript zur Berechnung von $\mathbf{w}$ und $\bar{\mathbf{w}}$ (aggregierte A-Tabelle).

```
mfmt = 12.4;                    Einstellen des Druckformats
mdef(IOT,12,20) = iot95ip.agg;  Einlesen der Tabelle
mdef(A,12,12)   = iot95ip.agg;  Einlesen der Vorleistungsmatrix
mscol(IOT,<20>,X);              Spaltenvektor X: Produktionswert
mdiag(X,XD);                    XD = diag(X)
minvd(XD,XDI);                  XDI = Inverse von XD
mmul(A,XDI,PI);                 PI = A * XDI
mdefi(12,12,I);                 I = Einheitsmatrix
mexpr(I - PI,IPI);              IPI = I - PI
mginv(IPI,IPINV);               IPINV = Inverse von IPI
mdef(E,12,1) = et95.agg;        E = Erwerbstaetige aus et95.agg
mtransp(E,ET);                  ET = Transponierte von E
mexpr(1000 * ET,ET);            ET = 1000 * ET
mmul(ET,XDI,WT);                WT = ET / X
mpr(WT);                        Ausdruck
mmul(WT,IPINV,WBT);             WBT = WT * IPTINV
mpr(WBT);                       Ausdruck
```

wie in Box 10.3.1 die Matrix $(\mathbf{I}-\mathbf{\Pi})^{-1}$ berechnet. Dann wird ein Vektor `E` gebildet, um die in Tabelle 10.3.2 angegebenen Erwerbstätigenzahlen zu erfassen (die Zahlen wurden zuvor in einem Datenfile `et95.agg` gespeichert). Durch Transposition entsteht daraus ein Zeilenvektor. Dessen Koeffizienten werden mit 1000 multipliziert, da die Angaben in Tabelle 10.3.2 in 1000 angegeben sind, und dann durch die Produktionswerte dividiert. So entsteht der Zeilenvektor `WT` ($=\mathbf{w}'$), dessen Koeffizienten die Anzahl der im Jahresdurchschnitt beschäftigen Erwerbstätigen pro 1 Mio. DM an Gütern des jeweiligen Bereichs enthalten. Schließlich liefert eine Berechnung entsprechend der Formel (10.3.2) den Vektor `WBT` ($=\bar{\mathbf{w}}'$). Die folgende Tabelle zeigt die berechneten Werte.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
w_i	12.8	3.1	3.2	4.4	4.0	5.1	3.9	6.7	8.8	3.1	10.5	6.5
$\bar{w}_i$	16.8	6.6	6.7	8.6	7.9	9.4	11.2	10.4	12.2	5.7	12.6	11.9

Im Durchschnitt wurden z.B. 12.8 Erwerbstätige eingesetzt, um landwirtschaftliche Güter im Wert von 1 Mio. DM zu erzeugen. Dies ist jedoch nur der direkte Arbeitseinsatz. Der gesamte inländische Arbeitseinsatz beträgt dagegen 16.8 jahresdurchschnittliche Erwerbstätige.

10.4 Modale Fragestellungen

Die Überlegungen und Berechnungen, die in den vorangegangenen Abschnitten (und im vorangegangenen Kapitel) angestellt wurden, zielten darauf, ein Bild der ökonomischen Verflechtungen zwischen Produktionsbereichen zu gewinnen. Darüber hinaus können Input-Output-Tabellen auch für modale Fragestellungen verwendet werden. Im folgenden Abschnitt wird zunächst erläutert, was damit gemeint ist; dann wird ein Beispiel besprochen.

10.4.1 Input-Output-Modelle

1. Unterscheidet man bei der Bruttoproduktion nur zwei Bestandteile, den Vorleistungsanteil und die Nettoproduktion, erhält man, wie in Abschnitt 10.2 gezeigt wurde, das Gleichungssystem

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Pi x} + \mathbf{y} \qquad (10.4.1)$$

wobei $\mathbf{x}$ der Vektor der Bruttoproduktion, $\mathbf{y}$ der Vektor der Nettoproduktion und $\mathbf{\Pi}$ die Matrix der Input-Koeffizienten bezeichnet. Eine Input-Output-Tabelle liefert für dieses Gleichungssystem bestimmte Zahlen. Mit diesen Zahlen wird der Intention nach festgestellt, welche Güterströme es in einem Berichtsjahr tatsächlich gegeben hat. Somit handelt es sich aus dieser Perspektive um Buchführungsgleichungen, die zur Darstellung von Vorgängen, die sich in einem vergangenen Zeitraum abgespielt haben, verwendet werden können. Soweit handelt es sich also um Fragestellungen, die sich darauf beziehen, was in einem vergangenen Zeitraum tatsächlich geschehen ist.

2. Darüber hinaus kann man auch andere Arten von Fragestellungen reflektieren: Was *könnte* (in der Zukunft) geschehen? Oder auch in hypothetischer Form: Was *würde* geschehen, wenn bestimmte (hypothetisch gesetzte) Vorgänge realisiert würden? Fragestellungen dieser Art werden *modale Fragestellungen* genannt. Sie beziehen sich nicht darauf, was tatsächlich ist bzw. in der Vergangenheit gewesen ist, sondern darauf, was sein bzw. werden könnte.[9] Um solche modalen Fragestellungen reflektierbar zu machen, dienen *Modelle*. Es werden hypothetische Annahmen formuliert, sowohl über mögliche Sachverhalte als auch über Regeln, um ein Verständnis möglicher Folgen zu gewinnen.

[9] Fragestellungen dieser Art sollten von *praxeologischen Fragestellungen* unterschieden werden, die sich darauf beziehen, was geschehen – oder besser: getan – werden müßte, damit bestimmte (angestrebte) Zustände eintreten. Etwas ausführlichere Überlegungen zu modalen Fragestellungen findet man in unserem Text zum Wahrscheinlichkeitsbegriff (Rohwer und Pötter 2002a).

3. Anhand des Gleichungssystems (10.4.1) kann die Vorgehensweise exemplarisch erläutert werden. Eine einfache Umformung liefert $\mathbf{y} = (\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})\,\mathbf{x}$, und daraus gewinnt man das Gleichungssystem

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})^{-1}\mathbf{y} \tag{10.4.2}$$

Da von einem System von Buchführungsgleichungen ausgegangen wurde, ist zunächst auch (10.4.2) ein System von Buchführungsgleichungen. Man kann es jedoch auch als Ausgangspunkt für modale Fragestellungen verwenden. In der Input-Output-Rechnung wird insbesondere oft eine modale Fragestellung diskutiert, die von der Annahme ausgeht, dass $\mathbf{y}$ in erster Linie als Ausdruck einer gesellschaftlichen Nachfrage nach den unterschiedlichen Arten von Gütern interpretiert werden kann.[10] Daran schließt sich folgende modale Fragestellung an: Wie würde sich die Bruttoproduktion $\mathbf{x}$ verändern, wenn sich die Nachfrage auf eine bestimmte (hypothetisch angenommene) Weise verändern würde? Es ist klar, dass man aus der Gleichung (10.4.2) ohne weiteres keine Antwort enthält. Denn wenn sich $\mathbf{y}$ verändert, kann sich auch $\mathbf{\Pi}$ verändern, und es ist insoweit vollständig offen, ob und wie sich $\mathbf{x}$ verändern wird. Wenn man jedoch annehmen könnte, dass sich $\mathbf{\Pi}$ für einen gewissen Zeitraum nicht verändert, könnte man (10.4.2) verwenden, um zu einer Antwort zu gelangen. Man nimmt hypothetisch einen neuen Vektor $\tilde{\mathbf{y}}$ an, und erhält dann einen korrespondierenden Bruttoproduktionsvektor $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})^{-1}\tilde{\mathbf{y}}$. Stattdessen kann man auch hypothetisch annehmen, dass sich $\mathbf{y}$ um $\Delta\mathbf{y}$ verändert. Die korrespondierende Veränderung von $\mathbf{x}$ ist dann

$$\Delta\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})^{-1}\Delta\mathbf{y} \tag{10.4.3}$$

4. Modelle dieser Art werden in der Literatur (offene) *Leontief-Modelle* genannt.[11] Der Modellansatz beruht auf zwei wesentlichen Annahmen. Die erste wurde bereits erwähnt: dass die Produktionsstruktur, wie sie in einer gegebenen Matrix von Input-Koeffizienten $\mathbf{\Pi}$ erfasst werden kann, für einen gewissen Zeitraum als näherungsweise konstant angenommen werden kann. Zweitens aber auch die Annahme, dass die Güterproduktion der Unternehmen einer vorgängig definierbaren Nachfrage nach Gütern folgt.[12] Beide Annahmen sind fragwürdig, aber auf die ziemlich weitläufige Diskussion kann an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden. Zunächst

[10] Eine gewisse Einschränkung ist hier natürlich schon deshalb erforderlich, weil $\mathbf{y}$ auch ungeplante Vorratsveränderungen umfasst.

[11] Benannt nach Wassily Leontief, der in den USA seit den 1930 er Jahren führend an der Entwicklung von Methoden der Input-Output-Rechnung beteiligt war.

[12] Z.B. heißt es bei J. Skolka (1974, S. 31): „Die IO-Analyse geht von der einfachen Überlegung aus, daß die Nachfrage nach Produkten eines Produktionszweiges nicht nur direkt dessen Produktionsumfang bestimmt, sondern auch indirekt Produktion in den ihm vorgelagerten Wirtschaftsbereichen induziert.“

Box 10.4.1 Skript zum aggregierten Leontief-Beispiel.

```
mfmt = 12.4;
mdef(IOT,12,20) = iot95ip.agg;      Einlesen der Tabelle
mdef(A,12,12)   = iot95ip.agg;      Einlesen der Vorleistungsmatrix
mscol(IOT,<20>,X);                  Spaltenvektor X: Produktionswert
mdiag(X,XD);                        Bildung einer Diagonalmatrix
minvd(XD,XDI);                      Bildung der Inversen von XD
mmul(A,XDI,PI);                     Inputkoeffizienten: PI = A * XDI
mdefi(12,12,I);                     Bildung einer Einheitsmatrix
mexpr(I - PI,IPI);                  IPI = I - PI
mginv(IPI,IPINV);                   IPINV = Inverse von IPI
mdefc(12,1,0,DY);                   Bildung eines Spaltenvektors DY
msetv(5070,DY(5,1));                DY(5) = 5070
mpr(DY);                            Ausdruck
mmul(IPINV,DY,DX);                  DX = IPINV * DY
mpr(DX);                            Ausdruck

mpr(DY)          mpr(DX)
   0.0000          7.3553
   0.0000        138.8757
   0.0000        348.6525
   0.0000        639.8841
5070.0000       6360.0474
   0.0000        150.1222
   0.0000         20.0419
   0.0000         74.7323
   0.0000        591.3946
   0.0000        957.2470
   0.0000         43.6514
   0.0000         65.8281
```

kommt es auch darauf an, ein besseres Verständnis dieses Typs von Modellen zu gewinnen. Deshalb besprechen wir im nächsten Abschnitt ein Beispiel.

10.4.2 Berechnung eines Beispiels

1. In diesem Abschnitt besprechen wir ein Beispiel, das in der Publikation des Statistischen Bundesamts zur Input-Output-Tabelle 1995 (FS 18, R. 12–1995, S. 61 ff.) angegeben wurde. In diesem Beispiel soll untersucht werden, wie sich – unter den Voraussetzungen des Leontief-Modells – eine Erhöhung der Nachfrage nach Kraftfahrzeugen um 10 % auf die Bruttoproduktion aller Bereiche auswirken würde. Zunächst erkennt man aus der nicht-aggregierten Input-Output-Tabelle, dass die Käufe der privaten Haushalte von Gütern des Bereichs 28 (Kraftwagen und Kraftwagenteile) 1995 insgesamt 50698 Mio. DM betrugen.[13] Davon 10 % sind 5070 Mio.

[13] Vgl. Zeile 28, Spalte 61 in Tabelle 8.3.4 in Abschnitt 8.3.3.

Tabelle 10.4.1 Rechnung mit der nicht-aggregierten A-Tabelle.

i	$\mathbf{x}_i^d$	i	$\mathbf{x}_i^d$	i	$\mathbf{x}_i^d$	i	$\mathbf{x}_i^d$
1	3	16	56	31	4	46	11
2	1	17	22	32	114	47	142
3	0	18	147	33	7	48	63
4	18	19	280	34	61	49	27
5	4	20	66	35	85	50	3
6	0	21	318	36	214	51	436
7	1	22	401	37	27	52	24
8	6	23	194	38	17	53	1
9	9	24	10	39	65	54	9
10	0	25	273	40	5	55	22
11	12	26	5	41	10	56	9
12	0	27	27	42	155	57	18
13	2	28	6173	43	50	58	20
14	28	29	1	44	117	59	0
15	20	30	75	45	17		

DM. Die Fragestellung ist also: Wie würde sich die Bruttoproduktion aller Bereiche erhöhen, wenn es in der Gütergruppe 28 einen zusätzlichen Nettoverbrauch in Höhe von 5070 Mio. DM geben würde?[14]

2. Zur Beantwortung dieser Frage wird an Gleichung (10.4.3) angeknüpft. Zunächst wird ein Vektor

$$\mathbf{y}^d := (0, \ldots, 0, 5070, 0, \ldots, 0)'$$

definiert, wobei sich der Eintrag 5070 in der Position 28 befindet. Dann erhält man durch $\mathbf{x}^d = (\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})^{-1}\mathbf{y}^d$ die entsprechende Veränderung $\mathbf{x}^d$.

3. In der Publikation des Statistischen Bundesamts wird die Rechnung auf der Grundlage der aggregierten A-Tabelle ausgeführt. Box 10.4.1 zeigt ein Skript, mit dem die Rechnung nachvollzogen werden kann. Die untere Hälfte der Box zeigt auf der linken Seite den Vektor $\mathbf{y}^d$ und auf der rechten Seite den durch Multiplikation mit der inversen Leontief-Matrix berechneten Vektor $\mathbf{x}^d$. Man erkennt, dass sich die Bruttoproduktion in allen Produktionsbereichen erhöht. Die größte Erhöhung zeigt sich natürlich im Bereich 5 (Maschinen, Fahrzeuge usw.) selbst. Aber auch in anderen Produktionsbereichen zeigen sich deutliche Erhöhungen. Z.B. gibt es im Bereich 10 (Dienstleistungen der Kreditinstitute und Versicherungen) eine Zunahme um 957 Mio. DM.

[14] Man kann sich auch ein praxeologisches Pendant zu dieser Formulierung vorstellen: Wie müsste sich die Bruttoproduktion aller Bereiche erhöhen, um in der Gütergruppe 28 einen zusätzlichen Nettoverbrauch in Höhe von 5070 Mio. DM zu ermöglichen?

4. Mit nur geringfügigen Veränderungen kann das in Box 10.4.1 angegebene Skript verwendet werden, um die Berechnungen mit der nicht-aggregierten A-Tabelle zu wiederholen. Ein solcher Vergleich ist auch deshalb nützlich, um einen gewissen Eindruck zu gewinnen, wie sich die Aggregation von Input-Output-Tabellen auf Rechnungen mit Leontief-Modellen auswirkt. Tabelle 10.4.1 zeigt die Rechenergebnisse. Man erkennt, dass es durchaus relevante Unterschiede zu den Ergebnissen mit der aggregierten Tabelle gibt. Dies betrifft auch den Gesamtumfang, um den die Bruttoproduktion zunimmt. Die Rechnung mit der aggregierten Tabelle liefert $\Sigma_i \mathbf{x}_i^d = 9398$, die Rechnung mit der nicht-aggregierten Tabelle liefert 9885 Mio. DM.

Anhang A

Mathematische Hilfsmittel

In diesem Anhang werden einige mathematische Hilfsmittel besprochen, die für Überlegungen des Haupttextes erforderlich sind. Im wesentlichen geht es um Eigenschaften von Verflechtungsmatrizen bzw. Adjazenzmatrizen gerichteter Graphen. Eine Kenntnis der Grundbegriffe der Matrizenrechnung, etwa im Umfang des Anhangs zu unserem Buch „Methoden sozialwissenschaftlicher Datenkonstruktion“, wird vorausgesetzt.

A.1 Einleitende Bemerkungen

1. Die Verflechtungsmatrizen, mit denen wir uns in diesem Text beschäftigen, haben alle eine wichtige Eigenschaft: Ihre Koeffizienten sind größer oder gleich Null. Solche Matrizen werden *nicht-negativ* genannt.[1] Sei nun $\mathbf{A}$ eine nicht-negative (n,n)-Matrix und $\mathbf{I}$ eine (n,n)-Einheitsmatrix. Eine wichtige Frage, die im Haupttext an mehreren Stellen auftritt, besteht darin: Unter welchen Bedingungen ist die Matrix $(\mathbf{I}-\mathbf{A})$ invertierbar und, die Invertierbarkeit vorausgesetzt, unter welchen Bedingungen ist auch $(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ eine nicht-negative Matrix?

2. Eine hinreichende Bedingungen für die Invertierbarkeit von $(\mathbf{I}-\mathbf{A})$ kann aus den Eigenwerten von $\mathbf{A}$ gewonnen werden. Da $\mathbf{A}$ eine (n,n)-Matrix ist, gibt es n Eigenwerte $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. Dabei kann der gleiche Eigenwert mehrfach auftreten, außerdem kann es sich um komplexe Zahlen handeln. Jedenfalls kann man die Eigenwerte nach ihrer absoluten Größe ordnen, so dass (ggf. nach passender Umnummerierung) gilt:

$$|\lambda_1| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

Der größte dieser Beträge wird *Spektralradius* der Matrix $\mathbf{A}$ genannt:

$$\rho(\mathbf{A}) := \max\{\,|\lambda| \mid \lambda \text{ Eigenwert von } \mathbf{A}\,\}$$

Jeder positive reelle Eigenwert λ^* von $\mathbf{A}$, für den $\lambda^* = \rho(\mathbf{A})$ gilt, wird ein *dominanter Eigenwert* von $\mathbf{A}$ genannt und durch $\mathrm{dom}(\mathbf{A})$ bezeichnet. Man beachte jedoch, dass eine Matrix mehrere oder auch gar keinen dominanten Eigenwert haben kann.

3. Es gilt nun der folgende Satz:[2] Wenn $\rho(\mathbf{A}) < 1$ ist, dann ist $(\mathbf{I}-\mathbf{A})$

[1] Wenn im folgenden von nicht-negativen Matrizen gesprochen wird, soll auch stets vorausgesetzt werden, dass es mindestens einen Koeffizienten gibt, der größer als Null ist. Null-Matrizen werden also aus der Betrachtung ausgeschlossen.

[2] Man vgl. Schwartz (1961, S. 31), wo auch auf weitere Literatur hingewiesen wird.

invertierbar, und es gilt:

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \tag{A.1.1}$$

In gewisser Weise handelt es sich um eine Verallgemeinerung eines Satzes, der vielleicht schon aus der Schulmathematik bekannt ist. Wenn nämlich a irgendeine Zahl (ein Skalar) und $|a| < 1$ ist, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$, und es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = (1-a)^{-1}$$

4. Wenn eine Darstellung in der Form (A.1.1) möglich ist, folgt auch unmittelbar eine Antwort auf die zweite Teilfrage. Denn wenn $\mathbf{A}$ eine nicht-negative Matrix ist, dann ist sicherlich die rechte Seite von (A.1.1) und infolgedessen auch $(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ eine nicht-negative Matrix. Zu überlegen ist also nur, unter welchen Bedingungen die Voraussetzung des Satzes erfüllt ist: dass der dominante Eigenwert von $\mathbf{A}$ dem Betrage nach kleiner als 1 ist, oder anders formuliert: dass alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ dem Betrage nach kleiner als 1 sind.

5. Zunächst folgen wir einer Überlegung von R. Solow (1952, S. 36 f.). $\mathbf{A}$ sei eine nicht-negative (n,n)-Matrix mit den Koeffizienten a_{ij}. λ sei ein beliebiger Eigenwert von $\mathbf{A}$. Dann ist λ auch ein Eigenwert der transponierten Matrix $\mathbf{A}'$,[3] und man kann sich auf den zugehörigen Eigenvektor $\mathbf{w}$ von $\mathbf{A}'$ beziehen, so dass gilt:

$$\mathbf{A}'\mathbf{w} = \lambda\,\mathbf{w} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathbf{w}'\mathbf{A} = \lambda\,\mathbf{w}'$$

Jetzt sei w_r der dem Betrage nach größte Koeffizient von $\mathbf{w}$, so dass also gilt: $|w_j| \leq |w_r|$ für $j = 1,\ldots,n$. Sicherlich ist dann auch $w_r \neq 0$, und es gilt: $\sum_{i=1}^{n} a_{ir}\,w_i = \lambda\,w_r$. Somit kann man folgende Gleichungen bzw. Ungleichungen bilden:

$$|\lambda|\cdot|w_r| = |\lambda\,w_r| = |\sum_{i=1}^{n} a_{ir}\,w_i| \leq \sum_{i=1}^{n} a_{ir}\,|w_i| \leq \sum_{i=1}^{n} a_{ir}\,|w_r|$$

Wenn man jetzt voraussetzen kann, dass die Spaltensummen von $\mathbf{A}$ kleiner oder gleich 1 sind, also $a_{\cdot j} := \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$, folgt aus der zuvor angegebenen Ungleichungskette:

$$|\lambda|\cdot|w_r| \leq |w_r|$$

[3] Es gilt allgemein, dass eine Matrix $\mathbf{A}$ und ihre Transponierte $\mathbf{A}'$ identische Eigenwerte (nicht jedoch Eigenvektoren) haben.

und da $w_r \neq 0$ ist, folgt daraus $|\lambda| \leq 1$. Damit ist folgendes Ergebnis gewonnen: Wenn die Spaltensummen der Matrix $\mathbf{A}$ kleiner oder gleich 1 sind, dann sind auch alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ dem Betrage nach kleiner oder gleich 1.

6. Die Bedingung, dass die Spaltensummen von $\mathbf{A}$ kleiner oder gleich 1 sind, kann in vielen Fällen mit inhaltlichen Überlegungen begründet werden. Wenn z.B. $\mathbf{A}$ eine Kapitalverflechtungsmatrix ist, bedeutet a_{ij} den im Besitz von i befindlichen Anteil des Kapitals von j. Die Spaltensumme $a_{\cdot j}$ ist dann die Summe aller Anteile am Kapital von j, wobei über alle in der Verflechtungsmatrix erfassten Knoten summiert wird; und es ist klar, dass diese Summe maximal den Wert 1 annehmen kann. Somit kann man in diesen Fällen auch die Schlußfolgerung ziehen, dass alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ dem Betrage nach kleiner oder gleich 1 sind. (Eine etwas andere Überlegung, die sich für Vorleistungs- bzw. Produktionsmatrizen eignet, wird in Abschnitt 6.1.2 besprochen.)

7. Allerdings genügt diese Voraussetzung noch nicht, um zu gewährleisten, dass eine Darstellung in der Form (A.1.1) möglich ist. Tatsächlich genügt die Voraussetzung nicht einmal für die Invertierbarkeit von $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$, wie das Beispiel

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

zeigt. Denn in diesem Beispiel ist $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ offenbar nicht invertierbar. Eine hinreiche Bedingung wäre zwar, dass alle Spaltensummen von $\mathbf{A}$ strikt kleiner als 1 sind. Denn dann würde aus der oben dargestellten Überlegung folgen, dass auch alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ dem Betrage nach strikt kleiner als 1 sind, und somit wären die Voraussetzungen für den eingangs genannten Satz erfüllt. Die Annahme, dass alle Spaltensummen von $\mathbf{A}$ kleiner als 1 sind, ist jedoch in vielen praktisch relevanten Anwendungsfällen unzutreffend.[4]

A.2 Unzerlegbare Matrizen

1. Neue Argumentationsmöglichkeiten entstehen, wenn man voraussetzen kann, dass die Matrix $\mathbf{A}$ *unzerlegbar* ist. Damit ist gemeint: Für beliebige Indizes $i, j \in \mathcal{N} := \{1, \ldots, n\}$ ist entweder $a_{ij} > 0$, oder es gibt weitere Indizes $k_1, \ldots, k_m \in \mathcal{N}$, so dass gilt:

$$a_{ik_1}\, a_{k_1 k_2} \cdots a_{k_m j} > 0$$

[4] Man denke z.B. an Kapitalverflechtungen. Es ist durchaus möglich, dass ein Unternehmen 100 % des Kapitals eines anderen Unternehmens besitzt.

Fasst man $\mathbf{A}$ als Adjazenzmatrix eines gerichteten Graphen auf, ist die Unzerlegbarkeit von $\mathbf{A}$ äquivalent damit, dass der Graph nicht in mehrere Komponenten zerlegt werden kann, also nur aus einer Komponente besteht.[5] Zwar ist auch diese Unzerlegbarkeit in vielen praktisch relevanten Anwendungsfällen nicht gegeben. Der Fall zerlegbarer Matrizen bzw. Graphen kann jedoch auf eine sequentielle Behandlung ihrer unzerlegbaren Komponenten zurückgeführt werden, so dass es durchaus sinnvoll ist, sich zunächst mit unzerlegbaren Matrizen zu beschäftigen.

2. Wenn $\mathbf{A}$ eine unzerlegbare nicht-negative Matrix ist, gilt:[6]

a) $\mathbf{A}$ hat einen einfachen positiven Eigenwert, dessen Wert gleich dem Spektralradius von $\mathbf{A}$ ist; es gibt also mindestens einen dominanten Eigenwert $\mathrm{dom}(\mathbf{A}) > 0$. Außerdem ist der zugehörige Eigenvektor ebenfalls reell und hat nur positive Koeffizienten.[7]

b) Für $j = 1, \ldots, n$ gilt: $\min_j\{a_{\cdot j}\} \leq \mathrm{dom}(\mathbf{A}) \leq \max_j\{a_{\cdot j}\}$.

c) Wenn $\mathrm{dom}(\mathbf{A}) = \min_j\{a_{\cdot j}\}$ oder $\mathrm{dom}(\mathbf{A}) = \max_j\{a_{\cdot j}\}$ ist, dann folgt daraus, dass $\min_j\{a_{\cdot j}\} = \max_j\{a_{\cdot j}\}$ ist.

3. Für unsere anfängliche Fragestellung wichtig sind vor allem die Eigenschaften (b) und (c). Im vorangegangenen Abschnitt wurde gezeigt, dass man bei einer Verflechtungsmatrix $\mathbf{A}$ oft annehmen kann, dass ihre Spaltensummen nicht größer als 1 sind und dass daraus $\mathrm{dom}(\mathbf{A}) \leq 1$ folgt. Der eben angeführte Satz zeigt, dass man bei unzerlegbaren Matrizen eine weitergehende Schlußfolgerung ziehen kann: Wenn keine Spaltensumme größer als 1 ist und wenn mindestens eine Spaltensumme kleiner als 1 ist, dann ist $\mathrm{dom}(\mathbf{A}) < 1$,[8] so dass also unter diesen Bedingungen $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ invertierbar ist und eine Darstellung der Inversen in der Form (A.1.1) möglich ist.[9] Im Haupttext wird gezeigt, dass diese schwächere Bedingung in vielen Fällen mit inhaltlichen Überlegungen begründet werden kann.

4. Bemerkenswert ist auch folgende Tatsache (Gantmacher 1971, S. 61): Wenn $\mathbf{A}$ eine unzerlegbare nicht-negative Matrix und $\mathrm{dom}(\mathbf{A}) < 1$ ist, dann sind auch alle Koeffizienten von $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ strikt positiv.

5. Dass es sich bei der Unzerlegbarkeit von $\mathbf{A}$ um eine durchaus wesentliche Voraussetzung handelt, kann man sich anhand der bereits oben als Beispiel

[5] Zum Begriff der Komponente bei gerichteten Graphen vgl. man Abschnitt 3.3.

[6] Dies wurde zuerst von G. Frobenius gezeigt. Wir stützen uns auf die Darstellung von F. R. Gantmacher (1971, S. 46 ff.).

[7] Da Eigenvektoren nur bis auf Multiplikation mit einem Skalar eindeutig bestimmt sind, gibt es gleichermaßen einen Eigenvektor, der nur negative Koeffizienten hat.

[8] Denn wenn $\mathrm{dom}(\mathbf{A}) = 1$ wäre, müssten alle Spaltensummen gleich 1 sein.

[9] Dieses Ergebnis findet man auch in der bereits genannten Arbeit von Solow (1952).

angeführten Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

verdeutlichen. Offenbar gilt in diesem Beispiel, dass keine Spaltensumme großer als 1 und mindestens eine Spaltensumme kleiner als 1 ist. Aber die Matrix ist nicht unzerlegbar, und der dominante Eigenwert ist 1.

A.3 Zerlegbare Matrizen

1. Es bleibt zu überlegen, wie man bei Verflechtungsmatrizen vorgehen kann, die sich in zwei oder mehr Komponenten zerlegen lassen. Wir nehmen also an, dass $\mathbf{A}$ eine nicht-negative Matrix ist, die sich in m Komponenten zerlegen lässt. Stellt man sich $\mathbf{A}$ als Adjazenzmatrix eines gerichteten Graphen $\mathcal{G}$ vor, entspricht jeder Komponente ein Teilgraph $\mathcal{G}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, und jeder Teilgraph $\mathcal{G}_i$ kann wiederum durch eine Adjazenzmatrix $\mathbf{A}_i$ dargestellt werden. Wie in Abschnitt 3.3 besprochen wurde, können dann zwei Fälle unterschieden werden:

a) Die Komponenten weisen keinerlei Verbindung auf, oder

b) es gibt mindestens zwei Komponenten, die durch mindestens eine Kante miteinander verbunden sind.

2. Wir besprechen zuerst den Fall (a). In diesem Fall lässt sich die Matrix $\mathbf{A}$ (ggf. nach einer passenden Umnummerierung der Indizes) in folgender Form darstellen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{A}_m \end{bmatrix} \tag{A.3.1}$$

$\mathbf{A}$ ist dann eine *Blockdiagonalmatrix*, in deren Hauptdiagonalen sich die Adjazenzmatrizen $\mathbf{A}_i$ der m Komponenten befinden. In entsprechender Weise kann man auch $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ darstellen:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_1 - \mathbf{A}_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (\mathbf{I}_m - \mathbf{A}_m) \end{bmatrix}$$

wobei $\mathbf{I}_1, \ldots, \mathbf{I}_m$ Einheitsmatrizen passender Ordnung sind. Setzt man jetzt voraus, dass in jeder der m Matrizen $\mathbf{A}_i$ keine Spaltensumme größer als 1 und mindestens eine Spaltensumme kleiner als 1 ist, so dass also $\mathrm{dom}(\mathbf{A}_i) < 1$ ist, sind auch alle Matrizen $(\mathbf{I}_i - \mathbf{A}_i)$ invertierbar und es gilt:

$$(\mathbf{I}_i - \mathbf{A}_i)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_i^k$$

Dann ist aber auch die Matrix $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ invertierbar, und man erhält folgende Darstellung:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_1 - \mathbf{A}_1)^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (\mathbf{I}_m - \mathbf{A}_m)^{-1} \end{bmatrix}$$

oder in Form einer Reihendarstellung:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_m^k \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k$$

Wenn die genannten Voraussetzungen erfüllt sind, gibt es also für das praktische Rechnen zwei Möglichkeiten: Man kann für jede Komponente die Matrix $(\mathbf{I}_i - \mathbf{A}_i)$ gesondert invertieren und dann aus den Ergebnissen die Inverse von $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ bilden; oder man ignoriert die Gliederung in Komponenten und bildet unmittelbar die Inverse von $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ (denn die Reihenfolge der Zeilen und Spalten spielt für die Invertierbarkeit keine Rolle).

3. Zum gleichen Ergebnis kommt man mit einer etwas anderen Überlegung, die auch nützlich ist, um den Fall (b) vorzubereiten. Denn wenn $\mathbf{A}$ eine blockdiagonale Matrix in der Form (A.3.1) ist, können ihre Eigenwerte und Eigenvektoren aus den Eigenwerten und Eigenvektoren der Blöcke $\mathbf{A}_i$ gewonnen werden. Sei nämlich λ ein Eigenwert von $\mathbf{A}_i$ mit zugehörigem Eigenvektor $\mathbf{v}$, also $\mathbf{A}_i\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Bildet man nun aus $\mathbf{v}$ einen neuen Vektor $\mathbf{v}^*$ der Länge n, der bei den $\mathbf{A}_i$ entsprechenden Indizes mit $\mathbf{v}$ identisch ist und andernfalls aus Nullen besteht, gilt $\mathbf{A}\mathbf{v}^* = \lambda\mathbf{v}^*$. Die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ sind also mit den Eigenwerten der Komponenten $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ identisch, und somit ist auch

$$\mathrm{dom}(\mathbf{A}) = \max_i\{\mathrm{dom}(\mathbf{A}_i)\}$$

Wenn also für alle Komponenten gilt, dass $\mathrm{dom}(\mathbf{A}_i) < 1$ ist, dann ist auch $\mathrm{dom}(\mathbf{A}) < 1$ und man kann den in Abschnitt A.1 besprochenen Satz über die Invertierbarkeit von $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ und die Reihendarstellung ihrer Inversen anwenden.

4. Jetzt besprechen wir den Fall (b). In diesem Fall gibt es mindestens eine Verbindung zwischen zwei Komponenten. Wie in Abschnitt 3.3 besprochen wurde, gilt aber jedenfalls:

a) Wenn es eine Kante gibt, die von einem Knoten in der Komponente $\mathbf{A}_i$ zu einem Knoten in der Komponente $\mathbf{A}_j$ führt, dann kann es umgekehrt keine Kante geben, die von einem Knoten in $\mathbf{A}_j$ zu einem Knoten in $\mathbf{A}_i$ führt.

b) Die Komponenten können (ggf. nach einer passenden Umnummerierung) in einer linearen Kette angeordnet werden, so dass gilt: Wenn von einem Knoten in der Komponente $\mathbf{A}_i$ eine Kante zu einem Knoten in der Komponente $\mathbf{A}_j$ führt, dann ist $i < j$.

Somit kann man die Matrix $\mathbf{A}$ in diesem Fall durch eine *obere Blockdiagonalmatrix* darstellen, die folgende Form hat:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 & & \\ & \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathbf{A}_m \end{bmatrix} \tag{A.3.2}$$

Wiederum befinden sich die Matrizen $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ in der Hauptdiagonalen und gibt es unterhalb von ihnen nur Nullen. Der Unterschied liegt nur darin, dass jetzt auch rechts neben den Blöcken positive Koeffizienten auftreten können, im Bild durch im allgemeinen rechteckige Matrizen $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_{m-1}$ symbolisiert.

5. Wichtig ist nun, dass die in Paragraph 3 skizzierte Überlegung in abgeschwächter Form auch bei oberen Blockdiagonalmatrizen gültig ist: Die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ sind mit den Eigenwerten der Blöcke $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ identisch. Zwar erhält man die zugehörigen Eigenvektoren mit dem in Paragraph 3 angegebenen Verfahren nur für den jeweils ersten Block $\mathbf{A}_i$; denn bei den nachgelagerten Blöcken sind außerdem die oberhalb der Hauptdiagonalen vorhandenen Matrizen $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_{m-1}$ zu berücksichtigen. Die Eigenwerte einer Matrix (im Unterschied zu ihren Eigenvektoren) verändern sich jedoch nicht, wenn man simultan Zeilen und Spalten vertauscht (was einer Umnummerierung der Knoten des zugehörigen Graphen entspricht). Somit kann man jeden Block an die erste Stelle bringen und dadurch zeigen, dass seine Eigenwerte auch Eigenwerte von $\mathbf{A}$ sein müssen.[10] Also braucht auch bei oberen Blockdiagonalmatrizen nur vorausgesetzt zu werden, dass in allen Komponenten $\mathbf{A}_i$ der dominante Eigenwert kleiner als 1 ist. Dann ist auch $\mathrm{dom}(\mathbf{A}) < 1$, und es folgt, dass $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ invertiertbar ist und die Inverse durch eine Reihe in der Form (A.1.1) dargestellt werden kann.

[10] Wenn man die Theorie der Eigenwerte mithilfe von Determinanten begründet, was in der Literatur oft getan wird, kann man auch direkter argumentieren. Die Eigenwerte einer Matrix $\mathbf{A}$ können dann als Wurzeln ihres charakteristischen Polynoms $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ definiert werden. Nun gilt aber für eine obere Blockdiagonalmatrix die Gleichung

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{m} \det(\lambda\mathbf{I}_i - \mathbf{A}_i)$$

woraus man erkennt, dass die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ mit den Eigenwerten ihrer Blöcke identisch sind.

6. Das Gesamtergebnis kann folgendermaßen zusammengefasst werden: Wenn $\mathbf{A}$ eine nicht-negative Matrix und der dominante Eigenwert in jeder Komponente von $\mathbf{A}$ kleiner als 1 ist, dann existiert die Inverse von $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$; außerdem kann die Inverse in Form einer Reihe

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k$$

dargestellt werden und ist selbst eine nicht-negative Matrix.

A.4 Berechnung von Beispielen

1. In diesem Abschnitt werden die theoretischen Ausführungen der vorangegangenen Abschnitte anhand einfacher Zahlenbeispiele illustriert. Zur inhaltlichen Interpretation stellen wir uns vor, dass durch die als Beispiele verwendeten Graphen bzw. Adjazenzmatrizen Kapitalverflechtungen zwischen Unternehmen erfasst werden. Als erstes Beispiel wird ein Graph mit vier Knoten (Unternehmen) betrachtet, deren Kapitalverflechtung in einer zyklischen Kette verläuft: Nr. 1 hält 40 % an Nr. 2, Nr. 2 hält 40 % an Nr. 3, Nr. 3 hält 40 % an Nr. 4, und Nr. 4 hält 40 % an Nr. 1. Es handelt sich dann um einen Graphen, der nur aus einer Komponente besteht, so dass seine Adjazenzmatrix unzerlegbar ist. Sie sieht folgendermaßen aus:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Box A.4.1 zeigt das Skript zur Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren.[11] Im unteren Teil wird das Rechenergebnis dargestellt. Da im allgemeinen komplexe Werte auftreten können, verwenden wir Klammern; der vordere Teil gibt den Realteil, der hintere den Imaginärteil an. Der zu einem Eigenwert gehörige Eigenvektor ist jeweils unterhalb des Eigenwerts dargestellt. Man erkennt, dass es in diesem Beispiel zwei reelle Eigenwerte gibt, zu denen auch jeweils ein reeller Eigenvektor gehört, nämlich 0.4 und -0.4. Der dominante Eigenwert ist offenbar $\mathrm{dom}(\mathbf{A}) = 0.4$ (gleich dem Minimum und Maximum der Spaltensummen von $\mathbf{A}$). Außerdem gibt es zwei komplexe Eigenwerte mit zugehörigen komplexen Eigenvektoren.[12]

[11] Wir verwenden den `mev`-Befehl, mit dem Eigenwerte und Eigenwerte für beliebige, nicht nur symmetrische quadratische Matrizen berechnet werden können. Reelle Eigenvektoren werden so normiert, dass ihre euklidische Länge = 1 ist.

[12] Nicht nur in diesem Beispiel, sondern generell gilt, dass bei jedem komplexen Eigenwert die komplexe Konjugierte ebenfalls ein Eigenwert ist. Beide unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen des Imaginärteils.

Box A.4.1 Skript zur Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren.

```
mdef(A,4,4) =
    0.0, 0.4, 0.0, 0.0, # Definition der A-Matrix
    0.0, 0.0, 0.4, 0.0,
    0.0, 0.0, 0.0, 0.4,
    0.4, 0.0, 0.0, 0.0;
mev(A,ER,EI,EVR,EVI);   # Berechnung von Eigenwerten u. Eigenvektoren
mpr(ER);                # Ausdruck Realteil der Eigenwerte
mpr(EI);                # Ausdruck Imaginaerteil der Eigenwert
mpr(EVR);               # Ausdruck Realteil der Eigenvektoren
mpr(EVI);               # Ausdruck Imaginaerteil der Eigenvektoren

Eigenwerte

( 0.4000, 0.0000) ( 0.0000, 0.4000) ( 0.0000,-0.4000) (-0.4000, 0.0000)

Eigenvektoren

( 0.5000, 0.0000) ( 1.0000, 0.0000) ( 1.0000, 0.0000) ( 0.5000, 0.0000)
( 0.5000, 0.0000) ( 0.0000, 1.0000) ( 0.0000,-1.0000) (-0.5000, 0.0000)
( 0.5000, 0.0000) (-1.0000, 0.0000) (-1.0000, 0.0000) ( 0.5000, 0.0000)
( 0.5000, 0.0000) ( 0.0000,-1.0000) ( 0.0000, 1.0000) (-0.5000, 0.0000)
```

Das Beispiel zeigt auch, dass mehrere, in diesem Beispiel sogar alle Eigenwerte dem Betrage nach gleich sein können. Jedenfalls ist der dominante Eigenwert und der zugehörige Eigenvektor positiv.

2. Jetzt betrachten wir einen Graphen, der in zwei Komponenten zerlegbar ist, zwischen denen es keine Verbindung gibt. Jeweils Nr. 1 und Nr. 2 und Nr. 3 und Nr. 4 halten wechselseitig Kapitalanteile, aber zwischen den beiden Komponenten gibt es keine Verbindung. Die Adjazenzmatrix sieht folgendermaßen aus:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

Es handelt sich also um eine Blockdiagonalmatrix mit zwei jeweils unzerlegbaren Blöcken. Box A.4.2 zeigt die Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren. Man erkennt, dass in diesem Beispiel nur reelle Werte auftreten. Der dominante Eigenwert ist 0.2828, also positiv, der zugehörige Eigenvektor ist jedoch nur nicht-negativ. An diesem Beispiel lässt sich auch noch einmal das im vorangegangenen Abschnitt verwendete Argument verdeutlichen: dass sich sich die Eigenwerte und Eigenvektoren einer Blockdiagonalmatrix aus den Eigenwerten und Eigenvektoren ihrer Blöcke bilden lassen. Führt man gesonderte Rechnungen für die beiden Blöcke

Box A.4.2 Skript zur Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren.

```
mdef(A,4,4) =
    0.0, 0.3, 0.0, 0.0, # Definition der A-Matrix
    0.1, 0.0, 0.0, 0.0,
    0.0, 0.0, 0.0, 0.4,
    0.0, 0.0, 0.2, 0.0;
mev(A,ER,EI,EVR,EVI);   # Berechnung von Eigenwerten u. Eigenvektoren
mpr(ER);                # Ausdruck Realteil der Eigenwerte
mpr(EI);                # Ausdruck Imaginaerteil der Eigenwert
mpr(EVR);               # Ausdruck Realteil der Eigenvektoren
mpr(EVI);               # Ausdruck Imaginaerteil der Eigenvektoren

Eigenwerte

(-0.1732, 0.0000) ( 0.1732, 0.0000) (-0.2828, 0.0000) ( 0.2828, 0.0000)

Eigenvektoren

(-0.8660, 0.0000) ( 0.8660, 0.0000) ( 0.0000, 0.0000) ( 0.0000, 0.0000)
( 0.5000, 0.0000) ( 0.5000, 0.0000) ( 0.0000, 0.0000) ( 0.0000, 0.0000)
( 0.0000, 0.0000) ( 0.0000, 0.0000) (-0.8165, 0.0000) ( 0.8165, 0.0000)
( 0.0000, 0.0000) ( 0.0000, 0.0000) ( 0.5774, 0.0000) ( 0.5774, 0.0000)
```

aus, findet man folgende Eigenwerte:

$$\text{für den Block } \mathbf{A}_1\text{:} \quad \lambda_1 = -0.1732 \quad \lambda_2 = 0.1732$$
$$\text{für den Block } \mathbf{A}_2\text{:} \quad \lambda_3 = -0.2828 \quad \lambda_4 = 0.2828$$

Sie sind offenbar mit den zuvor gefundenen Eigenwerten identisch, und es gilt $\mathrm{dom}(\mathbf{A}) = \max\{\mathrm{dom}(\mathbf{A}_1), \mathrm{dom}(\mathbf{A}_2)\} = \mathrm{dom}(\mathbf{A}_2)$. Eine gesonderte Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren liefert

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -0.8660 \\ 0.5000 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.8660 \\ 0.5000 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0.8165 \\ -0.5774 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0.8165 \\ 0.5774 \end{bmatrix}$$

Die Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ findet man daraus durch Erweiterung mit Nullen, so wie dies im vorangegangenen Abschnitt beschrieben worden ist.

3. Jetzt erweitern wir das vorangegangene Beispiel durch eine Verbindung zwischen Nr. 2 und Nr. 3, so dass eine obere Blockdiagonalmatrix entsteht. Die Adjazenzmatrix sieht folgendermaßen aus:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

Box A.4.3 Skript zur Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren.

```
mdef(A,4,4) =
    0.0, 0.3, 0.0, 0.0, # Definition der A-Matrix
    0.1, 0.0, 0.5, 0.0,
    0.0, 0.0, 0.0, 0.4,
    0.0, 0.0, 0.2, 0.0;
mev(A,ER,EI,EVR,EVI);    # Berechnung von Eigenwerten u. Eigenvektoren
mpr(ER);                 # Ausdruck Realteil der Eigenwerte
mpr(EI);                 # Ausdruck Imaginaerteil der Eigenwert
mpr(EVR);                # Ausdruck Realteil der Eigenvektoren
mpr(EVI);                # Ausdruck Imaginaerteil der Eigenvektoren

Eigenwerte

(-0.1732, 0.0000) ( 0.1732, 0.0000) (-0.2828, 0.0000) ( 0.2828, 0.0000)

Eigenvektoren

(-0.8660, 0.0000) ( 0.8660, 0.0000) ( 0.6975, 0.0000) ( 0.6975, 0.0000)
( 0.5000, 0.0000) ( 0.5000, 0.0000) (-0.6576, 0.0000) ( 0.6576, 0.0000)
( 0.0000, 0.0000) ( 0.0000, 0.0000) ( 0.2325, 0.0000) ( 0.2325, 0.0000)
( 0.0000, 0.0000) ( 0.0000, 0.0000) (-0.1644, 0.0000) ( 0.1644, 0.0000)
```

Die beiden Blöcke $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{A}_2$ sind mit denjenigen des vorangegangenen Beispiels identisch, jedoch gibt es zusätzlich eine Kante, die vom ersten zum zweiten Block führt. Wie man aus Box A.4.3 erkennt, haben sich die Eigenwerte nicht verändert. Auch an den Eigenvektoren für die Eigenwerte des ersten Blocks hat sich nichts geändert. Wohl aber haben sich die Eigenvektoren, die zu den Eigenwerten des zweiten Blocks gehören, verändert, da sie nicht durch einfache Ergänzung mit Nullen gebildet werden können.

4. Zum Abschluss behandeln wir die beiden in Abschnitt 5.3.1 angeführten Beispiele. Wir beginnen mit dem Graphen B, der durch folgende Adjazenzmatrix beschrieben wird:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{array}\right]$$

Der Graph bzw. die Matrix besteht aus zwei Komponenten:

$$\mathbf{A}_1 = \left[\begin{array}{c} 0 \end{array}\right] \quad \text{und} \quad \mathbf{A}_2 = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \end{array}\right]$$

Beide Blöcke sind unzerlegbar. Allerdings erfüllt der erste Block nicht unsere anfängliche Forderung an nicht-negative Matrizen, dass es mindestens

Box A.4.4 Skript zur Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren.

```
mdef(A,4,4) =
    0.0, 0.5, 0.0, 0.0, # Definition der A-Matrix
    0.0, 0.0, 0.1, 0.3,
    0.0, 0.1, 0.0, 0.0,
    0.0, 0.0, 0.2, 0.0;
mev(A,ER,EI,EVR,EVI);    # Berechnung von Eigenwerten u. Eigenvektoren
mpr(ER);                 # Ausdruck Realteil der Eigenwerte
mpr(EI);                 # Ausdruck Imaginaerteil der Eigenwert
mpr(EVR);                # Ausdruck Realteil der Eigenvektoren
mpr(EVI);                # Ausdruck Imaginaerteil der Eigenvektoren

Eigenwerte

( 0.0000, 0.0000) (-0.1000, 0.1414) (-0.1000,-0.1414) ( 0.2000, 0.0000)


Eigenvektoren

( 1.0000, 0.0000) ( 1.0000, 0.0000) ( 1.0000, 0.0000) ( 0.8980, 0.0000)
( 0.0000, 0.0000) (-0.2000, 0.2828) (-0.2000,-0.2828) ( 0.3592, 0.0000)
( 0.0000, 0.0000) ( 0.2000, 0.0000) ( 0.2000, 0.0000) ( 0.1796, 0.0000)
( 0.0000, 0.0000) (-0.1333,-0.1886) (-0.1333, 0.1886) ( 0.1796, 0.0000)
```

einen Koeffizienten geben soll, der größer als Null ist; der einzige Eigenwert von $\mathbf{A}_1$ ist 0. Dagegen erfüllt $\mathbf{A}_2$ die Voraussetzungen des Satzes von Frobenius und hat einen positiven dominanten Eigenwert, nämlich $\mathrm{dom}(\mathbf{A}_2) = 0.2$. Box A.4.4 zeigt die Berechnung für die Gesamtmatrix $\mathbf{A}$. Man erkennt, dass der dominante Eigenwert von $\mathbf{A}$ mit demjenigen von $\mathbf{A}_2$ identisch ist. Zu diesem dominanten Eigenwert gehört auch ein reeller Eigenvektor. In diesem Beispiel ist er strikt positiv, was jedoch bei zerlegbaren Matrizen nicht garantiert ist. Die beiden komplexen Eigenwerte gehören ebenfalls zur Komponente $\mathbf{A}_2$, und man erhält die gleichen Eigenwerte, wenn man für diese Komponente eine gesonderte Rechnung durchführt.

5. Als letztes Beispiel betrachten wir den Graphen A (aus Abschnitt 5.3.1) mit der Adjazenzmatrix

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{array}\right]$$

Es handelt sich um einen linearen Graphen, und infolgedessen bildet jeder Knoten einen eigenen „degenerierten“ Block. Man erkennt dies, wenn man die Nummern der Knoten 3 und 4 vertauscht; dann sieht die Adjazenzmatrix folgendermaßen aus:

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Es handelt sich um eine obere Blockdiagonalmatrix, bei der alle Blöcke die Ordnung $(1,1)$ haben und Null sind. Man kann insofern auch von einer *oberen Dreiecksmatrix* sprechen, bei der alle Elemente in der Hauptdiagonalen Null sind.[13] Für obere Dreiecksmatrizen gilt immer, dass ihre Eigenwerte mit den Koeffizienten in ihrer Hauptdiagonalen identisch sind; und somit gelangt man unmittelbar zu dem Ergebnis, dass in diesem Beispiel alle Eigenwerte gleich Null sind. Dies gilt im übrigen immer, wenn es sich um die Adjazenzmatrix eines linearen Graphen handelt. Umgekehrt gilt: Wenn ein Graph mindestens einen Zyklus aufweist, gibt es auch mindestens einen Eigenwert, der nicht gleich Null ist.[14]

6. Da in diesem Beispiel (wie überhaupt bei linearen Graphen) alle Eigenwerte Null sind, ist auch $\mathrm{dom}(\mathbf{A}) = 0$. Die in Abschnitt A.1 besprochenen Bedingungen für die Invertierbarkeit von $(\mathbf{I}-\mathbf{A})$ sind also sicherlich erfüllt; außerdem ist die Inverse nicht-negativ, nämlich

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.5000 & 0.0800 & 0.1500 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.1600 & 0.3000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.2000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

A.5 Integrierter Kapitalbesitz

1. In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie man zu der in Abschnitt 5.3.1 besprochenen Lösung für den integrierten Kapitalbesitz gelangt. Ausgangspunkt ist die bereits dort besprochene Matrizengleichung

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{I} - \mathrm{diag}\,(\mathbf{Y}))\,\mathbf{A} + \mathbf{YA} \tag{A.5.1}$$

Um eine Lösung zu finden, werden zwei Voraussetzungen gemacht:

[13] Allgemein versteht man unter einer oberen Dreiecksmatrix eine Matrix, bei der alle Koeffizienten unterhalb der Hauptdiagonalen Null sind. Analog wird von einer unteren Dreiecksmatrix gesprochen, wenn alle Koeffizienten oberhalb der Hauptdiagonalen Null sind.

[14] Es gibt dann nämlich mindestens eine unzerlegbare Komponenten, die mindestens zwei Knoten enthält. Infolgedessen zeigt der Satz von Frobenius, dass es dann einen positiven Eigenwert geben muss.

a) $\mathrm{dom}(\,\mathrm{diag}\,(\mathbf{Y})) < 1$ bzw. $y_{ii} < 1$ für $i = 1, \dots, n$. Bei inhaltlicher Interpretation bedeutet dies die Annahme, dass eine ökonomisch sinnvolle Lösung impliziert, dass der integrierte Kapitalbesitz bei keinem Unternehmen 100 % beträgt.[15]

b) $\mathrm{dom}(\mathbf{A}) < 1$. Da auf jeden Fall angenommen werden kann, dass alle Spaltensummen von $\mathbf{A}$ kleiner oder gleich 1 sind, bedeutet diese Voraussetzung, dass es in jeder Komponente mindestens ein Unternehmen gibt, bei dem die Summe der Kapitalanteile (gebildet über alle Knoten der Komponente) kleiner als 1 ist. Ausgeschlossen werden also z.B. Komponenten, die aus zwei Unternehmen bestehen, die wechselseitig jeweils 100 % am Kapital des jeweils anderen Unternehmens besitzen.

Entsprechend den Ausführungen in Abschnitt A.1 sind dann die Voraussetzungen für die Invertierbarkeit von $(\mathbf{I} - \mathrm{diag}\,(\mathbf{Y}))$ und $(\mathbf{I}-\mathbf{A})$ erfüllt, und es gelten die Darstellungen

$$(\mathbf{I} - \mathrm{diag}\,(\mathbf{Y}))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{diag}\,(\mathbf{Y})^k \quad \text{und} \quad (\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k$$

2. Jetzt kann an die Gleichung (A.5.1) angeknüpft werden. Subtrahiert man auf beiden Seiten $\mathbf{YA}$, erhält man

$$\mathbf{Y}\,(\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \mathbf{Y} - \mathbf{YA} = (\mathbf{I} - \mathrm{diag}\,(\mathbf{Y}))\,\mathbf{A}$$

und durch Linksmultiplikation mit $(\mathbf{I} - \mathrm{diag}\,(\mathbf{Y}))^{-1}$ und Rechtsmultiplikation mit $(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ folgt daraus

$$(\mathbf{I} - \mathrm{diag}\,(\mathbf{Y}))^{-1}\,\mathbf{Y} = \mathbf{A}\,(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} \tag{A.5.2}$$

3. Um ein Zwischenresultat zu gewinnen, wird auf beiden Seiten dieser Gleichung nur die Hauptdiagonale betrachtet. Somit ergibt sich folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} &\mathrm{diag}\,\big(\mathbf{A}\,(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\big) = \mathrm{diag}\,\big((\mathbf{I} - \mathrm{diag}\,(\mathbf{Y}))^{-1}\,\mathbf{Y}\big) = \\ &\quad \mathrm{diag}\,\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{diag}\,(\mathbf{Y})^k\,\mathbf{Y}\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{diag}\,(\,\mathrm{diag}\,(\mathbf{Y})^k\,\mathbf{Y}) = \\ &\quad \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{diag}\,(\mathbf{Y})^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{diag}\,(\mathbf{Y})^k = (\mathbf{I} - \mathrm{diag}\,(\mathbf{Y}))^{-1} - \mathbf{I} \end{aligned}$$

Bringt man $\mathbf{I}$ von der rechten auf die linke Seite, folgt

$$(\mathbf{I} - \mathrm{diag}\,(\mathbf{Y}))^{-1} = \mathbf{I} + \mathrm{diag}\,\big(\mathbf{A}\,(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\big)$$

[15] Man beachte, dass bereits bei der Problemformulierung in Abschnitt 5.3.1 vorausgesetzt wurde, dass $a_{ii} = 0$ ist.

und setzt man diesen Ausdruck in die Gleichung (A.5.2) ein, erhält man folgendes Zwischenresultat:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\,(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} &= (\mathbf{I} + \operatorname{diag}\left(\mathbf{A}\,(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right)\,\mathbf{Y} \\ &= \operatorname{diag}\left(\mathbf{I} + \mathbf{A}\,(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right)\,\mathbf{Y} \end{aligned} \tag{A.5.3}$$

4. Eine zweite Hilfsrechnung bezieht sich auf den Ausdruck in den Klammern des diag-Operators auf der rechten Seite der zuletzt genannten Gleichung. Man kann folgende Rechnung anstellen:

$$\mathbf{I} + \mathbf{A}\,(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{A}\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{A}^k = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{A}^k = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{A}^k = (\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$$

Somit gewinnt man aus (A.5.3) die Gleichung

$$\mathbf{A}\,(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \operatorname{diag}((\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1})\mathbf{Y}$$

Durch Linksmultipliation mit der Inversen von $\operatorname{diag}((\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1})$ folgt schließlich die Lösung

$$\mathbf{Y} = \operatorname{diag}\left((\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right)^{-1}\mathbf{A}\,(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} \tag{A.5.4}$$

die in Abschnitt 5.3.1 verwendet wurde.

Anhang B

Konstruktion von Input-Output-Tabellen

Dieser Anhang beginnt mit einigen Hinweisen auf Daten- und Schätzprobleme, die sich bei der Konstruktion von Input-Output-Tabellen stellen. Im Anschluß werden einige Verfahren besprochen, die in der Literatur vorgeschlagen worden sind, um unvollständige Informationen durch Schätzungen zu ersetzen.

B.1 Daten- und Schätzprobleme

1. Bei der Erstellung von Input-Output-Tabellen wird zwischen der *Input-* und der *Output-Methode* unterschieden. Den Ausgangspunkt bilden Informationen über die gesamte Produktion in den einzelnen Produktionsbereichen und über deren Verwendung, differenziert in Vorleistungen, Konsum, Investitionen und Exporte, die aus vorhandenen Statistiken mehr oder weniger gut ermittelt werden können.[1] Das Hauptproblem stellt sich bei der Erfassung der Vorleistungsverflechtungen zwischen den Produktionsbereichen bzw. Gütergruppen.

a) Bei der Input-Methode wird versucht, für jeden Produktionsbereich die Gesamtsumme der Vorleistungen nach Gütergruppen aufzugliedern.

b) Bei der Output-Methode wird versucht, denjenigen Teil der Produktion, der in Form von Vorleistungen verwendet wird, nach Gütergruppen aufzugliedern.

Dazu heißt es bei Stäglin (1968, S. 69):

„Bei der Input-Methode wird von den Gesamtinputs der einzelnen Wirtschaftszweige ausgegangen; die Tabellenerstellung erfolgt spaltenweise, in dem für die einzelnen Produktions- und Endnachfragesektoren die Kosten- bzw. Bezugsstrukturen ermittelt werden. [...]

Bei der Output-Methode wird die Tabelle zeilenweise erstellt, indem die Outputs der einzelnen Produktionssektoren auf die jeweiligen Verbraucher bzw. Käufer aufgeteilt werden. Zur Ermittlung dieser Outputs wird von dem Gesamtangebot einer Vielzahl von Gütergruppen ausgegangen, das sich aus der Inlandserzeugung

[1] Allerdings werden diese Größen in der Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnung auf der Grundlage institutioneller Gliederungen berechnet, so dass sich das Problem stellt, den Übergang zu den funktionellen Unterscheidungen einer Input-Output-Tabelle zu vollziehen. Dafür wurde vom Statistischen Bundesamt ein ziemlich kompliziertes „Überleitungsmodell“ entwickelt. Man vgl. Stahmer (1979).

und den Einfuhren zusammensetzt, das aber durch Abzug der Ausfuhren auch auf die inländische Verfügbarkeit beschränkt werden kann. Dieses Güterangebot wird den in der Input-Output-Tabelle unterschiedenen Produktionssektoren seiner jeweiligen Herkunft nach zugeordnet und ergibt dann, je nach Berücksichtigung der Nebenprodukte im weitesten Sinn, die institutionell oder funktionell abgegrenzten Outputs als Ausgangsgrößen, die in einem zweiten Rechengang auf die einzelnen Abnehmer zu verteilen sind.“

Weiter schreibt Stäglin (S. 70):

„Theoretisch müßten die Input- und die Output-Methode zum gleichen Ergebnis führen. Deshalb wäre es günstig, wenn die Input-Output-Tabelle nach beiden Methoden aufgestellt würde. Da das aber aus statistischen Gründen nicht möglich ist, muß man sich mit einer Kombination beider Methoden begnügen, wobei der Schwerpunkt trotzdem auf einer der beiden Methoden liegen kann. So geht z.B. das Ifo-Institut bei seiner Tabellenerstellung vorwiegend nach der Output-Methode vor und verwendet die Input-Methode nur subsidiär zu Kontrollzwecken, während das DIW die Input-Methode bevorzugt und nur bei einigen Sektoren auf die Output-Methode zurückgreift.“

2. Das statistische Bundesamt versucht, beide Methoden zu kombinieren. Über die Konstruktion der Input-Output-Tabelle für das Berichtsjahr 1995 heißt es in der FS 18, R. 2–1995, S. 24:

„Zur Erstellung von Input-Output-Tabellen werden im Berechnungsablauf der Input-Output-Rechnung des Statistischen Bundesamtes verschiedene Methoden angewendet. Ausgangsgrößen für die Berechnung der Input-Output-Tabellen sind tiefgegliederte Angaben über das *Aufkommen* an Gütern aus inländischer Produktion und aus Importen. Wichtigste statistische Quellen für die Ermittlung des inländischen Aufkommens sind die Ergebnisse der Produktionsstatistik; den Importangaben liegen insbesondere die Werte der Außenhandelsstatistik zugrunde. Die Aufkommensgrößen bilden die Spalten- bzw. Zeilensummen der Input-Output-Tabellen. Die Aufgliederung der Angaben in den Spalten geschieht vor allem mit Hilfe der Input-Methode und in den Zeilen mit der Output-Methode.“

Weiter heißt es:

„Für die Berechnung der Vorleistungen im ersten Quadranten der Input-Output-Tabelle stehen demnach zwei Berechnungsmethoden zur Verfügung. Das ist vor allem deshalb wichtig, weil die statistischen Angaben über Vorleistungsinputs für einzelne Bereiche (vor allem Dienstleistungsbereiche) sehr unvollständig sind. Lücken im statistischen Nachweis bei der einen Methode können durch Ergebnisse nach der anderen Methode ganz oder teilweise geschlossen werden. Im Zuge der *Abstimmung* der nach beiden Methoden ermittelten Rechenergebnisse können Ungenauigkeiten erkannt und unter Beachtung der jeweils verwendeten Basisstatistiken beseitigt werden. Ferner ist eine Aktualisierung der Input-Strukturen trotz des Fehlens jährlicher Angaben über den Wareneingang mit Hilfe der Output-Methode schätzungsweise möglich.“

3. Es ist hilfreich, sich das Problem in einer formalen Notation deutlich zu machen. Gesucht ist eine Vorleistungsmatrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$ mit n Zeilen und Spalten. Bekannt sind zunächst die Spalten- bzw. Zeilensummen:

$$\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)' \qquad \text{und} \qquad \mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)'$$

So ergibt sich folgendes Schema:

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & v_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & v_n \\ \hline u_1 & \cdots & u_n & \end{array}$$

Die gesuchten Koeffizienten a_{ij} können jedoch nicht unmittelbar ermittelt werden. Stattdessen liefert die Input-Methode eine Matrix $\mathbf{U} = (u_{ij})$ und die Output-Methode eine Matrix $\mathbf{V} = (v_{ij})$. In schematischer Darstellung ergibt sich somit folgendes Bild:

$$\begin{array}{ccc|c} u_{11} & \cdots & u_{1n} & u_{1\cdot} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} & u_{n\cdot} \\ \hline u_{\cdot 1} & \cdots & u_{\cdot n} & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc|c} v_{11} & \cdots & v_{1n} & v_{1\cdot} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} & v_{n\cdot} \\ \hline v_{\cdot 1} & \cdots & v_{\cdot n} & \end{array}$$

Die Methoden gewährleisten, dass $u_{\cdot j} = u_j$ und $v_{i\cdot} = v_i$ ist; aber sie gewährleisten nicht die Gleichungen $u_{i\cdot} = v_i$ und $v_{\cdot j} = u_j$. Somit entsteht die Frage, wie man aus einer Kenntnis der Matrizen **U** und **V** die Matrix **A** konstruieren kann. Dabei ist zu berücksichtigen, dass beide Matrizen mehr oder weniger unvollständig sein können;[2] im Grenzfall gibt es nur eine unvollständige **U**- oder **V**-Matrix.

4. Hat man nach der Input-Methode die **U**-Matrix und/oder nach der Output-Methode die **V**-Matrix ermittelt, gibt es für die (i, j)-Felder der Vorleistungsmatrix folgende Möglichkeiten:

1. Sowohl u_{ij} als auch v_{ij} haben näherungsweise gültige Werte,
2. nur für u_{ij} gibt es einen näherungsweise gültigen Wert,
3. nur für v_{ij} gibt es einen näherungsweise gültigen Wert,
4. sowohl u_{ij} als auch v_{ij} sind unbekannt.

[2] Das Problem unvollständiger Informationen stellte sich insbesondere in den Anfängen der Konstruktion von Input-Output-Tabellen. Z.B. berichten Stäglin und Wessels (1969, S. 21) über die Berechnung einer Input-Output-Tabelle des DIW mit 56 Sektoren für das Berichtsjahr 1958, dass von den insgesamt 3136 Feldern der Tabelle nur 1949 „originär ermittelt werden“ konnten.

Im letzten Fall hat man keinerlei Informationen und ist gezwungen, in irgendeiner Form Schätzungen vorzunehmen; z.B. kann man versuchen, Informationen aus früheren Jahren zu verwenden und aus ihnen in irgendeiner Weise Näherungswerte für das Berichtsjahr zu bilden. Weiterhin stimmen im ersten Fall die Koeffizienten der **U**- und der **V**-Matrix nicht unbedingt überein. Dann muss eine „Abstimmung" vorgenommen werden, um Inkonsistenzen zu beseitigen. Bei der Erstellung der Input-Output-Tabellen des Statistischen Bundesamts werden solche Inkonsistenzen zunächst für jedes Feld der Tabelle gesondert untersucht und ggf. mithilfe zusätzlicher und spezifischer Informationen zu beseitigen versucht (vgl. FS 18, R. 2-1995, S. 46).

5. Als Ergebnis entsteht aus den Matrizen **U** und **V** eine neue Matrix $\mathbf{B} = (b_{ij})$, in der alle Felder eine provisorische Gültigkeit haben. Allerdings ist nicht automatisch gewährleistet, dass die Spalten- und Zeilensummen mit den vorgegebenen Größen der Vektoren **u** bzw. **v** übereinstimmen. Deshalb erfolgt schließlich ein weiterer Rechenschritt. In der FS 18, R. 2-1995 (S. 47), heißt es dazu:

„Für die Abstimmung der verbliebenen Differenzen im ersten Quadranten wird ein maschinelles *Fehlerausgleichsprogramm* benutzt, mit dessen Hilfe die Werte der Vorleistungsmatrix [in unserer Terminologie die Matrix **B**] in einem iterativen Prozeß innerhalb vorgegebener Grenzen abwechselnd zeilen- und spaltenweise so lange verändert werden, bis die Zeilen- und Spaltensummen mit den entsprechenden Ausgangswerten [in unserer Terminologie die Vektoren **u** und **v**] übereinstimmen."

Weiterhin wird darauf hingewiesen, dass nicht alle Koeffizienten der **B**-Matrix als gleichermaßen modifizierbar betrachtet werden; sondern einige vermutlich gesicherte Koeffizienten werden als unveränderbar behandelt und für einige andere werden Unter- und Obergrenzen für ihre Modifikation festgelegt.

6. Wie das „Fehlerausgleichsprogramm" im einzelnen beschaffen ist, wird in der zitierten Quelle nicht näher ausgeführt. Aus der Literatur sind jedoch einige Verfahren bekannt, die für diesen Zweck eingesetzt werden können. Mit einem dieser Verfahren beschäftigen wir uns im folgenden Abschnitt. Dabei gehen wir zunächst von einer vereinfachten Problemstellung aus, die folgendermaßen beschrieben werden kann: Gegeben ist eine (n, n)-Matrix $\mathbf{B} = (b_{ij})$, deren Koeffizienten nicht-negativ und deren Spaltensummen $b_{\cdot j}$ und Zeilensummen $b_{i\cdot}$ positiv sind. Außerdem gibt es positive Vektoren **u** und **v**, deren Koeffizienten die geforderten Spalten- und Zeilensummen angeben und für die außerdem gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{j=1}^{n} u_j \qquad \text{(B.1.1)}$$

Gesucht ist eine (n, n)-Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$, deren Spalten- bzw. Zeilensummen mit **u** bzw. **v** übereinstimmen und die sich möglichst wenig von **B** unterscheidet.

B.2 Exemplarische Schätzverfahren

1. Zur Bearbeitung des am Ende des vorangegangenen Abschnitts beschriebenen Problems sind eine Reihe unterschiedlicher Rechenverfahren vorgeschlagen worden. Bei den meisten handelt es sich um Varianten des IPF-Verfahrens (eine Abkürzung für „iterative proportional fitting"), das zuerst von W. E. Deming und F. F. Stephan (1940) dargestellt wurde. Für die Konstruktion von Input-Output-Tabellen ist die Idee unter dem Namen RAS-Verfahren aufgegriffen worden. In der BRD ist das Verfahren insbesondere im Zusammenhang mit der Konstruktion von Input-Output-Tabellen durch das DIW eingesetzt und, unter dem Namen MODOP-Verfahren („Modell der doppelten Proportionalität") weiterentwickelt worden.[3]

2. Die Grundidee besteht darin, die Koeffizienten einer gegebenen Matrix **A** so lange zu modifizieren, bis ihre Zeilen- und Spaltensummen mit vorgegebenen Werten (in unserer Notation die Vektoren **u** und **v**) übereinstimmen. Das Verfahren ist iterativ. Jeder Iterationsschritt hat die Form

$$\mathbf{A}^{k+1} \;\leftarrow\; \mathbf{R}^{k+1}\mathbf{A}^{k}\,\mathbf{S}^{k+1}$$

wobei k die Iterationsschritte zählt ($k = 0, 1, \ldots$). $\mathbf{R}^k$ und $\mathbf{S}^k$ sind Diagonalmatrizen; als Anfangswert wird $\mathbf{A}^0 := \mathbf{B}$ verwendet.

3. Durch die Koeffizienten der **S**-Matrix wird eine Anpassung an die vorgegebenen Spaltensummen vorgenommen. Gefordert ist $u_j = a_{\cdot j}\, s_j$, was den Rechenschritt

$$s_j^{k+1} \;\leftarrow\; \frac{u_j}{a_{\cdot j}^{k}}$$

motiviert. Hat man ihn für alle Spalten $j = 1, \ldots, n$ ausgeführt, entsteht die Matrix $\mathbf{A}^{k'} := \mathbf{A}^k\,\mathbf{S}^{k+1}$, deren Spaltensummen mit den vorgegebenen Werten übereinstimmen. Allerdings ist noch nicht gewährleistet, dass auch die Zeilensummen von $\mathbf{A}^{k'}$ mit den vorgegebenen Werten übereinstimmen. Deshalb wird jetzt eine Anpassung mit den Koeffizienten der **R**-Matrix vorgenommen. Gefordert ist in diesem Fall $v_i = a_{i\cdot}^{k'}\, r_i$, was den Rechenschritt

$$r_i^{k+1} \;\leftarrow\; \frac{v_i}{a_{i\cdot}^{k'}}$$

[3] R. Stäglin (1968, S. 71 ff.), J. Schintke (1973).

Box B.2.1 Der RAS-Algorithmus.

(1)	für alle i und j: $a_{ij} \leftarrow b_{ij}$
(2)	für alle i und j: $a_{ij} \leftarrow a_{ij}\,\dfrac{u_j}{a_{\cdot j}}$
(3)	für alle i und j: $a_{ij} \leftarrow a_{ij}\,\dfrac{v_i}{a_{i\cdot}}$
(4)	Abbruch, wenn $\max_{i,j}\{\,\lvert a_{i\cdot} - v_i\rvert\,,\,\lvert a_{\cdot j} - u_j\rvert\,\} \leq \epsilon$ andernfalls Fortsetzung bei (2).

motiviert. So entsteht die Matrix

$$\mathbf{A}^{k+1} \leftarrow \mathbf{R}^{k+1}\mathbf{A}^{k'} = \mathbf{R}^{k+1}\mathbf{A}^{k}\,\mathbf{S}^{k+1}$$

Diese beiden Rechenschritte werden nun so lange wiederholt, bis die **A**-Matrix sowohl in ihren Spalten- als auch in ihren Zeilensummen hinreichend mit den vorgegebenen Werten übereinstimmt.[4] Box B.2.1 fasst den Ablauf des Algorithmus zusammen. Im Schritt (4) wird die Konvergenz geprüft: Wenn die maximale Abweichung zwischen den durch $\mathbf{A}^k$ gegebenen und den durch **u** und **v** geforderten Spalten- und Zeilensummen nicht größer als eine vorgegebene Genauigkeitsschranke ϵ ist, kann abgebrochen werden; andernfalls werden die Iterationen fortgesetzt.[5]

4. Um den Algorithmus zu illustrieren, soll die aggregierte A-Tabelle für 1995 verwendet werden, um eine Schätzung für die aggregierte A-Tabelle für 1997 zu gewinnen.[6] Die Vorleistungsmatrix der aggregierten A-Tabelle 1995 bildet also unsere Matrix **B**. Für 1997 wird nur eine Kenntnis der Spaltensummen **u** und der Zeilensummen **v** vorausgesetzt. Die Angaben können dem Statistischen Jahrbuch 2001 entnommen werden:

$$\mathbf{u} = (36.4, 60.6, 172.7, 120.5, 399.5, 140.3, 153.1, 218.2, 409.1, 536.1, 126.8, 377.6)'$$

$$\mathbf{v} = (60.4, 92.5, 206.3, 150.3, 238.6, 139.4, 77.9, 98.0, 411.3, 914.9, 249.7, 111.5)'$$

Allerdings sind infolge von Rundungsfehlern die Summen der Koeffizienten beider Vektoren nicht genau gleich, denn $\Sigma_i\, v_i = 2750.8$ und $\Sigma_j\, u_j =$

[4] Damit das Verfahren konvergiert, müssen die am Ende des vorangegangenen Abschnitts angegebenen Bedingungen, insbesondere die Gleichung (B.1.1), gegeben sein. Sie sind jedoch nur notwendig, nicht aber hinreichend für die Existenz einer Lösung, man vgl. die Hinweise bei A. Bachem und B. Korte (1979).

[5] Einfache Zahlenbeispiele, mit denen man sich den Ablauf des Algorithmus verdeutlichen kann, findet man z.B. bei Stäglin (1968, S. 73 f.) und bei Holub und Schnabl (1994, S. 98 f.).

[6] Die aggregierte A-Tabelle für 1997 findet man im Statistischen Jahrbuch 2001, S. 674f. Die Angaben sind Herstellungspreise in Mrd. DM.

Tabelle B.2.1 Aggregierte A-Tabellen für 1995 (erste Zeile), für 1997 (zweite Zeile) und für 1997 mit dem RAS-Verfahren geschätzt (dritte Zeile). Herstellungspreise in Mrd. DM.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2.2	0.1	0.1	0.0	0.0	2.4	47.2	0.0	1.1	1.4	0.6	1.3
	2.4	0.1	0.1	0.0	0.0	2.4	50.6	0.0	1.2	1.5	0.7	1.4
	2.4	0.1	0.1	0.0	0.0	2.6	50.3	0.0	1.3	1.5	0.7	1.4
2	2.4	21.0	19.4	8.8	7.9	6.5	4.4	5.0	12.6	4.0	5.5	5.5
	2.3	14.9	16.7	8.1	7.9	6.3	4.4	4.4	12.4	4.1	5.4	5.5
	2.2	16.9	17.4	8.3	8.1	5.9	4.0	4.5	11.6	3.6	5.1	5.0
3	4.1	2.0	65.3	8.9	29.0	11.7	4.9	64.2	10.2	2.1	6.2	14.0
	3.5	1.5	60.0	8.5	31.3	10.3	4.3	59.1	9.2	1.7	5.8	11.2
	3.8	1.6	59.2	8.5	29.8	10.6	4.4	58.5	9.5	1.9	5.8	12.8
4	0.6	2.8	6.5	55.6	58.4	3.4	2.7	21.4	4.8	0.9	2.2	1.5
	0.5	2.4	5.7	50.7	57.8	2.9	2.3	19.5	4.3	0.7	1.9	1.4
	0.6	2.2	5.7	51.1	58.1	3.0	2.4	18.9	4.3	0.7	2.0	1.3
5	1.7	6.5	5.8	7.5	150.0	2.5	1.6	20.6	16.8	4.1	12.4	5.9
	1.5	5.6	5.2	7.1	155.6	2.2	1.4	19.6	18.2	3.8	12.3	6.2
	1.6	5.4	5.4	7.3	158.3	2.3	1.5	19.3	16.1	3.8	11.9	5.6
6	0.3	0.7	5.7	2.7	10.5	54.9	5.4	15.4	17.5	12.9	6.4	8.8
	0.3	0.6	5.9	2.9	12.0	51.8	5.1	15.0	17.5	13.2	6.4	8.9
	0.3	0.6	5.6	2.7	11.6	53.4	5.2	15.1	17.5	12.4	6.4	8.6
7	6.4	0.0	3.0	0.0	0.1	0.1	32.9	0.0	21.6	0.1	6.0	2.9
	7.1	0.0	3.5	0.0	0.2	0.1	35.3	0.0	21.7	0.1	6.6	3.4
	6.8	0.0	3.2	0.0	0.1	0.1	34.7	0.0	23.3	0.1	6.5	3.0
8	0.8	3.8	2.5	2.2	2.6	1.5	1.1	7.8	10.3	46.4	10.7	8.8
	0.8	3.7	2.5	2.4	3.0	1.6	1.1	7.8	10.8	44.5	10.9	9.0
	0.8	3.4	2.5	2.2	2.9	1.5	1.1	7.8	10.5	45.6	10.9	8.8
9	7.4	6.6	22.1	20.0	48.0	24.2	21.8	27.3	141.1	21.3	18.9	42.5
	7.2	6.2	21.9	20.9	54.7	24.1	21.6	27.9	145.7	21.2	18.8	41.0
	7.5	5.9	22.1	20.8	54.2	24.2	21.8	27.3	144.4	21.0	19.4	42.6
10	6.8	15.9	42.2	14.9	59.0	28.3	22.5	58.6	132.5	388.6	36.8	38.9
	7.5	16.5	45.3	17.2	72.5	31.4	23.6	61.3	144.7	411.6	40.1	43.1
	7.4	15.3	45.4	16.7	71.6	30.3	24.2	63.1	145.8	412.4	40.7	42.0
11	2.1	0.7	2.9	1.0	1.1	1.6	1.5	1.1	7.8	6.8	9.1	203.9
	2.7	0.7	2.9	1.0	1.2	1.6	1.5	1.1	7.8	7.0	10.5	211.8
	2.2	0.7	3.0	1.1	1.3	1.6	1.6	1.1	8.3	7.0	9.7	212.3
12	0.6	8.2	2.8	1.4	2.7	4.2	1.8	2.2	14.2	23.3	6.7	29.9
	0.6	8.4	3.0	1.7	3.3	5.6	1.9	2.5	15.6	26.7	7.4	34.7
	0.6	8.4	3.2	1.7	3.5	4.8	2.0	2.6	16.5	26.2	7.8	34.2

2750.9. Wir ändern deshalb den letzten Koeffizienten in **u** von 377.6 in 377.5. Dann kann der oben angegebene Algorithmus verwendet werden, um eine Matrix **A** zu berechnen, die sich von **B** möglichst wenig unterscheidet und deren Zeilen- bzw. Spaltensummen mit **u** bzw. **v** übereinstimmen. Tabelle B.2.1 zeigt das Ergebnis der Berechnung.[7]

5. Eine Alternative hätte darin bestanden, von der Konstanz der Input-

[7] Zur Berechnung wurde der TDA-Befehl `mpfit` verwendet. Die Koeffizienten für 1995 wurden in Mrd. DM umgerechnet, um sie mit den Informationen für die Zeilen- und Spaltensummen für 1997 vergleichbar zu machen. Für eine vorgegebene Genauigkeitsschranke $\epsilon = 10^{-6}$ wurde die Konvergenz in 23 Iterationen erreicht.

Koeffizienten im Zeitraum von 1995 bis 1997 auszugehen. Dann wären jedoch deutlich schlechtere Schätzungen erzielt worden. Z.B. findet man aus Tabelle 10.2.1 (in Abschnitt 10.2) für 1995 den Input-Koeffizienten $\pi_{9,4} = 0.0781$. Den Produktionswert des Produktionsbereichs 4 für das Jahr 1997 findet man im Statistischen Jahrbuch (2001, S. 674): 252.3 Mrd. DM. Unter der Annahme, dass der Input-Koeffizient im Jahr 1997 noch den gleichen Wert hätte wie im Jahr 1995, ergäbe sich als Schätzung für den Güterstrom vom Bereich 9 zum Bereich 4 der Wert

$$0.0781 \cdot 252.3 = 19.7 \text{ Mrd. DM}$$

Der vermutlich richtigere Wert aus Tabelle B.2.1 beträgt jedoch 20.9 und die mit dem Schätzverfahren erzielte Näherung beträgt 20.8 Mrd. DM.

6. Das vom DIW verwendete MODOP-Verfahren ist eine Weiterentwicklung des IPF- bzw. RAS-Algorithmus. Die Modifikationen bestehen im wesentlichen darin, dass andere Startwerte verwendet werden, um die Konvergenz des Rechenverfahrens zu beschleunigen, und dass die Möglichkeit besteht, die Werte bestimmter Koeffizienten zu fixieren, so dass sie nicht in das Ausgleichsverfahren einbezogen werden.

7. Außer dem RAS- bzw. MODOP-Algorithmus gibt es noch andere Verfahren, um das am Ende des vorangegangenen Abschnitts beschriebene Problem zu lösen. Z.B. wurde von U. Blien und F. Graef (1992) ein Verfahren entwickelt, bei dem Intervalle angegeben werden können, um die Modifikationsmöglichkeiten für die zu schätzenden Koeffizienten einer Tabelle einzuschränken. Die im vorangegangenen Abschnitt zitierten Ausführungen der FS 18, R. 2-1995 über das im Statistischen Bundesamt eingesetzte „Fehlerausgleichsprogramm“ deuten darauf hin, dass dort ein Algorithmus dieser Art verwendet wird.

Literatur

Die im Text zitierten Publikationen der amtlichen Statistik, insbesondere des Statistischen Bundesamts, werden hier nicht aufgeführt.

Bachem, A., Korte, B. 1979. On the RAS-Algorithm. Computing 23, 189–198.

Bachem, A., Korte, B. 1984. Adjusting Input-Output Tables. In: Recent Developments in the Analysis of Large-Scale Data Sets. Eurostat News, Special Number 1984, 203–220.

Baldone, S., Brioschi, F., Paleari, S. 1997. Ownership Measures Among Firms Connected by Cross-Shareholdings and a Further Analogy with Input-Output Theory. Mimeo.

Bartels, H., Hanisch, G., Lauckner, W. 1965. Möglichkeiten und Grenzen der Berechnung von Input-Output-Tabellen für die Bundesrepublik Deutschland. Wirtschaft und Statistik 17, 69–81.

Bleses, P., Stahmer, C. 1994. Input-Output-Tabellen 1990. Wirtschaft und Statistik 42, 329–342.

Bleses, P., Stahmer, C. 2000. Input-Output-Rechnung 1995 und 1997. Wirtschaft und Statistik 48, 901–913.

Blien, U., Graef, F. 1992. ENTROP: A General Purpose Entropy Optimizing Method for the Estimation of Tables, the Weighting of Samples, the Disaggregation of Data, and the Development of Forecasts. In: F. Faulbaum (ed.), SoftStat ’91. Advances in Statistical Software 3, 195–201. Stuttgart: Fischer.

Braakmann, A. 1990. Input-Output-Rechnung 1970 bis 1986. Wirtschaft und Statistik 38, 69–79.

Czayka, L. 1972. Qualitative Input-Output-Analyse. Die Bedeutung der Graphentheorie für die interindustrielle Input-Output-Analyse. Meisenheim am Glan: Anton Hain.

Deming, W. E., Stephan, F. F. 1940. On a Least Squares Adjustment of a Sampled Frequency Table when the Expected Marginal Totals are Known. Annals of Mathematical Statistics 11, 427–444.

Di Battista, G., Eades, P., Tamassia, R., Tollis, I. G. 1999. Graph Drawing. Algorithms for the Visualization of Graphs. London: Prentice Hall.

Fleissner, P., Böhme, W., Brautzsch, H.-U., Höhne, J., Siassi, J., Stark, K. 1993. Input-Output-Analyse. Wien: Springer-Verlag.

Forsyth, E., Katz, L. 1946. A Matrix Approach to the Analysis of Sociometric Data: Preliminary Report. Sociometry 9, 340–347.

Gantmacher, F. R. 1971. Matrizenrechnung (Teil II). Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Helmstädter, E. 1962. Die geordnete Input-Output-Struktur. Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik 174, 322–361.

Helmstädter, E. 1965. Linarität und Zirkularität des volkswirtschaftlichen Kreislaufs. Weltwirtschaftliches Archiv 94, 234–261.

Helmstädter, E., Meyer, B., Kleine, E., Richtering, J. 1983. Die Input-Output-Analyse als Instrument der Strukturforschung. Tübingen: Mohr.

Holub, H.-W., Schnabl, H. 1994. Input-Output-Rechnung: Input-Output-Tabellen. 3. Aufl. München: Oldenbourg.

Holub, H.-W., Schnabl, H. 1994a. Input-Output-Rechnung: Input-Output-Analyse. München: Oldenbourg.

Holub, H.-W., Schnabl, H., Tappeiner, G. 1985. Qualitative Input-Output-Analysis with Variable Filter. Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft 141, 282–300.

Jacobs, J. H. 1945. The Application of Sociometry to Industry. Sociometry 8, 181–198.

Jansen, D. 1999. Einführung in die Netzwerkanalyse. Opladen: Leske + Budrich.

Jennings, H. H. 1937. Structure of Leadership-Development and Sphere of Influence. Sociometry 1, No. 1-2, 99–143.

Jennings, H. H. 1943. Leadership and Isolation (2nd ed. 1950). New York: Longmans.

Kleine, E., Meyer, B. 1982. Qualitative oder quantitative Input-Output-Analyse für die Konjunkturpolitik? Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft 138, 129–145.

Korte, B., Oberhofer, W. 1968. Die Triangulation von Input-Output-Matrizen. Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik 182, 398–433.

Krelle, W. 1959. Volkswirtschaftliche Gesamtrechnung einschließlich Input-Output-Analyse mit Zahlen für die Bundesrepublik Deutschland. Berlin.

Krug, W., Nourney, M., Schmidt, J. 1999. Wirtschafts- und Sozialstatistik. Gewinnung von Daten. München: Oldenbourg.

Kunz, D. 1987. Praktische Wirtschaftsstatistik. Stuttgart: Kohlhammer.

Liang, C.-K. 1993. An $O(n^2)$ Algorithm for Finding the Compact Sets of a Graph. BIT 33, 390–395.

Lippe, P. v. d. 1996. Wirtschaftsstatistik. 5. Aufl. Stuttgart: Lucius & Lucius.

Lützel, H. 1987. Statistische Erfassung von Dienstleistungen. Allgemeines Statistisches Archiv 71, 17–37.

Lundberg, G. A., Steele, M. 1938. Social Attraction-Patterns in a Village. Sociometry 1, No. 3-4, 375–419.

Mai, H. 1973. Das Input-Output-Programm des Statistischen Bundesamtes. In: R. Krengel (Hg.), Aufstellung und Analyse von Input-Output-Tabellen, 7–28, Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Mai, H. 1974. Input-Output-Tabelle 1970. Wirtschaft und Statistik 26, 167–176.

Moreno, J. L. 1934. Who Shall Survive? A New Approach to the Problem of Human Inter-relations. New York: Baecon House.

Moreno, J. L. 1937. Sociometry in Relation to Other Social Sciences. Sociometry 1, No. 1-2, 206–219.

Moreno, J. L. 1940. Time as a Quantitative Index of Inter-Personal Relations. Sociometry 3, 62–80.

Moreno, J. L. 1951. Sociometry, Experimental Method and the Science of Society. Beacon, N.Y.: Beacon House Inc.

Moreno, J. L. 1953. Who Shall Survive? Foundations of Sociometry, Group Psychotherapy and Sociodrama. Beacon, N.Y.: Baecon House, Inc.

Moreno, J. L. 1967. Die Grundlagen der Soziometrie. 2. erw. Auflage. Köln: Westdeutscher Verlag.

Moreno, J. L., Jennings, H. H. 1938. Statistics of Social Configurations. Sociometry 1, No. 3-4, 342–374.

Neubauer, W. 1996. Preisstatistik. München: Vahlen.

Northway, M. L. 1940. A Method for Depicting Social Relationships Obtained by Sociometric Testing. Sociometry 3, 144–150.

Northway, M. L. 1942. Social Acceptability Test. Sociometry 5, 180–184.

Ott, A. E. 1972. Zur Geschichte der Input-Output-Analyse. In: W. Krelle (Hg.), Operations Research-Verfahren, 140–145. Meisenheim: Anton Hain.

Pardalos, P. M., Rendl, F., Wolkowicz, H. 1994. The Quadratic Assignment Problem: A Survey and Recent Developments. In: P. M. Pardalos, H. Wolkowicz (eds.), Quadratic Assignment and Related Problems, 1–42. American Mathematical Society: DIMACS, Vol. 16.

Raabe, K.-H. 1965. Statistische Unterlagen für die Erstellung einer Input-Output-Tabelle. Allgemeines Statistisches Archiv 49, 246–258.

Reich, U.-P., Stäglin, R., Stahmer, C., Schintke, J., Eichmann, W. 1995. Ein System von Input-Output-Tabellen für die Bundesrepublik Deutschland. DIW-Beiträge zur Strukturforschung, H. 159. Berlin: Duncker & Humblot.

Rinne, H. 1996. Wirtschafts- und Bevölkerungsstatistik. 2. Aufl. München: Oldenbourg.

Rohwer, G., Pötter, U. 2001. Grundzüge der sozialwissenschaftlichen Statistik. Weinheim: Juventa.

Rohwer, G., Pötter, U. 2002. Methoden sozialwissenschaftlicher Datenkonstruktion. Weinheim: Juventa.

Rohwer, G., Pötter, U. 2002a. Wahrscheinlichkeit. Begriff und Rhetorik in der Sozialforschung.

Schintke, J. 1973. Modell der doppelten Proportionalität zur Schätzung von nichtnegativen Matrizen, insbesondere Input-Output-Tabellen. Angewandte Informatik 15, 153–156.

Schnabl, H., Holub, H.-W. 1979. Qualitative und quantitative Aspekte der Input-Output-Analyse. Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft 135, 657–678.

Schumann, J. 1968. Input-Output-Analyse. Berlin: Springer-Verlag.

Schwartz, J. T. 1961. Lectures on the Mathematical Method in Analytical Economics. New York: Gordon and Breach.

Scott, J. 1991. Social Network Analysis. A Handbook. London: Sage.

Selltiz, C., Jahoda, M., Deutsch, M., Cook, S. W. 1959. Research Methods in Social Relations. Revised One-Volume Edition. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Skolka, J. 1974. Anwendung der Input-Output-Analyse. Berechnungen am Beispiel der österreichischen Wirtschaftsstruktur. Stuttgart: Fischer.

Solow, R. 1952. On the Structure of Linear Models. Econometrica 20, 29–46.

Sraffa, P. 1963. Production of Commodities by Means of Commodities. Prelude to a Critique of Economic Theory. Cambridge: Cambridge University Press.

Stäglin, R. 1968. Aufstellung von Input-Output-Tabellen. Konzeptionelle und empirisch-statistische Probleme. DIW-Beiträge zur Strukturforschung, H. 4. Berlin: Duncker & Humblot.

Stäglin, R. 1982. Überblick über die Aktivitäten auf dem Gebiet der Input-Output-Rechnung in der Bundesrepublik Deutschland. In: R. Krengel (Hg.), Die Weiterentwicklung der Input-Output-Rechnung in der Bundesrepublik Deutschland, 7–56. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Stäglin, R., Wessels, H. 1969. Input-Output-Tabellen und Input-Output-Analysen für die Bundesrepublik Deutschland. DIW-Beiträge zur Strukturforschung, H. 6. Berlin: Duncker & Humblot.

Stahmer, C. 1979. Verbindung von Ergebnissen der herkömmlichen Sozialproduktsberechnung und der Input-Output-Rechnung: Überleitungsmodell des Statistischen Bundesamtes. Allgemeines Statistisches Archiv 63, 340–385.

Stahmer, C., Bleses, P., Meyer, B. 2000. Input-Output-Rechnung: Instrumente zur Politikberatung. Internet-Dokument. Zugänglich über die Internetadresse des Statistischen Bundesamts: `www.statistik-bund.de`.

Wagenführ, R. 1970. Wirtschafts- und Sozialstatistik. Band 1. Freiburg: Rudolf Haufe.

Wasserman, S., Faust, K. 1994. Social Network Analysis: Methods and Applications. Cambridge: Cambridge University Press.

Wessels, H. 1981. Triangulation und Blocktriangulation von Input-Output-Tabellen und ihre Bedeutung. DIW-Beiträge zur Strukturforschung, Heft 63. Berlin: Duncker & Humblot.

West, D. H. 1983. Algorithm 608. Approximative Solution of the Quadratic Assignment Problem. ACM Transactions on Mathematical Software 9, 461–466.

Windolf, P. 1995. Eigentum und Herrschaft in Unternehmensnetzwerken. In: J. Fischer, S. Gensior (Hg.), Netz-Spannungen: Trends in der sozialen und technischen Vernetzung von Arbeit, 67–91. Berlin: Ed. Sigma 1995

Windolf, P. 1997. Eigentum und Herrschaft. Elite-Netzwerke in Deutschland und Großbritannien. Leviathan 25, 76–106.

Windolf, P. 1998. Elite Networks in Germany and Britain. Sociology 32, 321–351.

Windolf, P., Beyer, J. 1995. Kooperativer Kapitalismus. Unternehmensverflechtungen im internationalen Vergleich. Kölner Zeitschrift für Soziologie und Sozialpsychologie 47, 1–36.

Windolf, P., Beyer, J. 1996. Co-operative Capitalism: Corporate Networks in Germany and Britain. British Journal of Sociology 47, 205–231.

Windolf, P., Nollert, M. 2001. Institutionen, Interessen, Netzwerke Unternehmensverflechtung im internationalen Vergleich. Politische Vierteljahresschrift 42, 51–78.

Wohlrapp, H. R. 1979. Handlungsforschung. In: J. Mittelstraß (Hg.), Methodenprobleme der Wissenschaften vom gesellschaftlichen Handeln, 122–214. Frankfurt: Suhrkamp.

Zeleny, L. D. 1940. Sociometry in the College Classroom. Sociometry 3, 102–104.